INTRODUÇÃO À GEOMETRIA TROPICAL

Nathália Eliza Alves de Andrade (PIC/UEM), Marcelo Escudeiro Hernandes (Orientador), e-mail: ra98890@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas / Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra - Matemática - Álgebra

Palavras-chave: Geometria Tropical, Semicorpo Tropical, Polinômio Tropical.

Resumo:

O mundo matemático evoluiu muito nos últimos anos e isso pode passar uma falsa impressão de que não há mais nada novo a ser explorado, porém a matemática está sempre sujeita às novas descobertas. Um exemplo disso é a Geometria min-plus, também conhecida como Geometria Tropical.
Este projeto de pesquisa teve o intuito de ampliar o conhecimento matemático de uma discente do Programa de Educação Tutorial (PET-Matemática/UEM) por meio do estudo da Álgebra tropical e Geometria tropical.

Introdução

A Geometria Tropical corresponde à Geometria analítica ou algébrica tomando por plano de fundo estruturas algébricas não usuais sobre o conjunto dos números reais. Mais precisamente dizendo, consideramos sobre o conjunto dos números reais operações que o tornam um semicorpo, tais operações correspondem ao que chamamos uma Álgebra min-plus. Nesta estrutura algébrica consideramos a álgebra da extensão dos números reais incorporando o infinito como um de seus elementos que denotamos por $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, e considerando duas operações binárias, o mínimo e a adição que denotamos por $\oplus$ e por $\otimes$, respectivamente.
O surgimento da Álgebra Tropical é atribuído ao matemático brasileiro Imre Simon (1943-2009) que foi uma peça essencial no desenvolvimento da álgebra min-plus. Seus estudos foram baseados em problemas da matemática aplicada e cuja motivação encontra-se enraizada em diversas áreas, algumas ligadas a área da pesquisa operacional, como no estudo de tempo de tarefas combinadas, por exemplo: Suponha que para a entrega de um produto tenhamos duas opções de envio, a opção 1 demora um tempo t_1 de entrega e a opção 2 demora um tempo t_2. Além disso, as duas opções têm um adicional de 2 dias para a entrega à residência do destinatário. Assim, o menor tempo de entrega do produto é

$$min\{t_1, t_2\}+2$$

que nas notações da álgebra min-plus é o mesmo que

$$(t_1 \oplus t_2) \otimes t_2.$$

Neste projeto estudamos os conceitos introdutórios da Geometria Tropical, enfatizando os aspectos algébricos dos objetos e, em particular, apresentamos a definição e mostramos alguns resultados de conjuntos convexos tropicais e raízes de polinômios.

Materiais e métodos

Neste projeto, os materiais e métodos utilizados para seu desenvolvimento, foram os usuais na pesquisa básica matemática, isto é, pesquisa bibliográfica em revistas científicas e livros da área, pesquisa bibliográfica em mídia online e seminários semanais entre orientado e orientador para discussão do material estudado.

Resultados e Discussão

No conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ definimos as operações:

$$a \oplus b = \min\{a, b\} \text{ e } a \otimes b = a + b.$$

Constatamos que $(\overline{\mathbb{R}}, \oplus, \otimes)$ é um semicorpo, isto é:

i. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;
ii. $a \oplus b = b \oplus a$;
iii. $+\infty \oplus a = a$, para todo $a \in \overline{\mathbb{R}}$;
iv. $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$;
v. $a \otimes b = b \otimes a$;
vi. $0 \otimes a = a$, para todo $a \in \overline{\mathbb{R}}$;
vii. $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$.

Note que $a \oplus a \oplus \ldots \oplus a = a$.

Durante o projeto estudamos algumas propriedades algébricas desse semicorpo. Por conseguinte, introduzimos definições e resultados sobre Geometria Projetiva para definir variedades algébricas projetivas tropicais e, a partir disso, definir espaços lineares na Geometria Tropical e retas tropicais.

Uma propriedade interessante é que o semicorpo $(\overline{\mathbb{R}}, \oplus, \otimes)$ é limite do semicorpo $(\mathbb{R}_{\geq 0}, +, \times)$, que é chamado de dequantização de Maslov. Para isso, inicialmente tomamos um número real t tal que $0 < t < 1$ e consideremos a aplicação:

$$\log_t : \mathbb{R}_{>0} \to \overline{\mathbb{R}}.$$

Essa aplicação é uma bijeção que induz uma estrutura de semicorpo em $\overline{\mathbb{R}}$ com as operações

$$x +_t y = \log_t(t^x + t^y)$$

e

$$x \times_t y = \log_t(t^x t^y).$$

Note que $x \times_t y = \log_t(t^x t^y) = \log_t(t^{x+y}) = x + y = x \otimes y.$

Além disto, temos que o limite $+_t$ é $\oplus$ quando t tende à zero pela direita. De fato, como 0 < t < 1, temos que

$$t^{\min\{x,y\}} \leq t^x + t^y \leq 2t^{\min\{x,y\}}.$$

Assim, como a função log_t é decrescente para valores de t no intervalo (0,1), temos que

$$\log_t 2 + \min\{x,y\} \leq x +_t y \leq \min\{x,y\}.$$

Logo, como $\log_t 2 \to 0$ quando t tende à zero pela direita, então $+_t \to \oplus$ quando t tende à zero pela direita. Portanto, temos que $(\overline{\mathbb{R}},\oplus,\otimes)$ pode ser considerado como limite do semicorpo $(\mathbb{R}_{\geq 0}, +, \times)$.

Na álgebra tropical, definimos um polinômio tropical, p(x), pela expressão:

$$p(x) = a_0 \oplus \left(a_1 \otimes x^{\otimes 1}\right) \oplus \ldots \oplus \left(a_d \times x^{\otimes d}\right) = min_{i=0}^{d}\, a_i + ix.$$

Neste caso, dizemos que x_0 é raiz de um polinômio tropical p(x) se $p(x_0) = +\infty$ ou se existe pelo menos um par (i , j) com $i \neq j$ tal que

$$p(x_0) = a_i + ix_0 = a_j + jx_0.$$

A partir da definição dada, temos que um outro modo de verificar qual a raiz de um polinômio tropical p(x), caso ele tenha raiz, é constatar em quais pontos o gráfico de p(x) deixa de ser linear.

Um fato interessante é que $x^2 + 1$ não tem raiz em $\mathbb{R}$ mas

$$p(x) = \min\{2x, 1\}$$

tem raiz $x_0 = \frac{1}{2}$ em $\overline{\mathbb{R}}$.

Veja na figura 1 que $x_0 = \frac{1}{2}$ é exatamente onde o gráfico de p(x) deixa de ser linear.

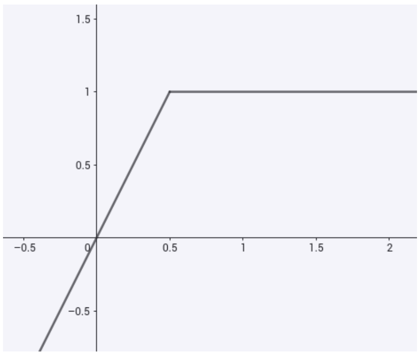

Figura 1 – p(x)= min{2x,1}

Por fim, definimos raízes de polinômios tropicais e provamos que todo polinômio tropical de grau d tem exatamente d raízes em $\overline{\mathbb{R}}$, a menos da ordem das raízes. Dito de outro modo o semicorpo $(\overline{\mathbb{R}},\oplus,\otimes)$ é algebricamente fechado.

Conclusões

A partir do estudo realizado, conclui-se que na Geometria Tropical existem objetos e propriedades tanto análogas quanto diferentes da Álgebra usual, o que é intrigante. Com isso, pode-se avançar na pesquisa matemática em diversas direções: na Geometria Algébrica, na Álgebra Comutativa, na Álgebra Topical, na Geometria Tropical, etc.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador pelos ensinamentos, à Universidade Estadual de Maringá e ao projeto PET Matemática-UEM pelo apoio estrutural e financeiro para o desenvolvimento deste projeto de iniciação científica.

Referências

Brugallé, E.; Itenberg, I., Mikhalkin, G.; Shaw, K. **Brief Introduction to tropical geometry,** 21st Gökova Geometry-Topology Conference, 2015.

Richter J.; Sturmfels B.; Theobald T. **First Steps in Tropical Geometry,** Comtemporary Mathematics, 2003.