Introdução á Topologia geral, algébrica e teoria das superfícies.

Gustavo Massao Yoshitome (PIBIC/CNPq/FA/Uem), Ryuichi Fukuoka (Orientador), e-mail: ra98534@uem.br
Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Ciências Exatas/Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra / Matemática

Palavras-chave: Espaços topológicos, Invariantes topológicos, Grupo Fundamental.

Resumo:

Seja X um conjunto. Uma topologia T de X é uma coleção de subconjuntos de X, chamados de abertos. X munido com a topologia T é chamado espaço topológico e é o objeto natural para o estudo de continuidade. No mesmo conjunto podem ser definidas diferentes topologias, dependendo de como são dados os abertos. O principal tipo de ferramenta matemática utilizado para tal estudo são as funções contínuas, que são definidas a partir das topologias e muito bem formalizadas nesta teoria. Com esta noção, é definido o conceito de equivalência topológica, que é peça central para se obter as principais relações entre os espaços topológicos, através de objetos chamados invariantes topológicos.

Introdução

Desde cedo aprendemos em geometria o que são as arestas, vértices e faces de um poliedro. Acima de tudo isso, também é conhecido a fórmula de Euler para poliedros convexos que afirma que v-e+f=2, onde v é o número de vértices, e é o número de arestas e f o número de faces. Entretanto esta fórmula vale para uma classe mais abrangente ainda de poliedros. Tal fórmula inspirou o estudo da relação entre os objetos que obedecem esta relação. O número v-e+f, ficou conhecido como número de Euler para o poliedro.

A partir desta curiosidade surgiu o estudo dos espaços topológicos. Em Topologia, um espaço topológico X é qualquer conjunto, em que ao definirmos os abertos destes conjuntos, eles satisfazem três axiomas. O primeiro deles é que a interseção finita de qualquer aberto é aberto. O segundo é que a união de abertos é aberto. Por fim, o último pede que todo conjunto, e o conjunto vazio sejam abertos. Isto define uma topologia em X. As superfícies são tipos particulares de espaços topológicos, por isso esta teoria pode ser utilizada para estudar superfícies como as discutidas na fórmula de Euler.

Ao discutir espaços topológicos, é extremamente importante definir homeomorfismos. Estes são funções entre dois espaços topológicos, que de certa forma preservam as características do domínio, por isso dizemos que se dois espaços possuem um homeomorfismo entre si, eles são topologicamente equivalentes. Dessa forma o estudo da topologia consiste em estudar estes conjuntos através dessas equivalências, que muitas vezes são dadas por invariantes topológicos, que são características fundamentais compartilhadas por espaços equivalentes. Um desses invariantes topológicos é o número de Euler. Na verdade ele deve ser chamado de característica de Euler, uma vez que podemos considerar conjuntos que não são superfícies com vértice, aresta e face.

Dentre outros invariantes, existem a compacidade, que intuitivamente possui a ideia do espaço ser fechado e limitado, a conexidade, que leva em conta se o espaço é formado por "apenas um pedaço" e o grupo fundamental. Este último em particular é interessante, pois permite abordar problemas de topologia, fazendo álgebra.

Materiais e métodos

Os materiais utilizados foram bibliografias citadas nas referências, e outras fontes auxiliares.

O método foi estudo das bibliografias, com seminários semanais junto ao orientador, apresentando todo conteúdo estudado durante a respectiva semana.

Resultados e Discussão

Ao longo do projeto, foram estudados diversos resultados em topologia. O primeiro deles foi o teorema de Euler para poliedros, cuja demonstração possui uma rica análise sobre as propriedades dos poliedros que satisfazem este teorema.

No campo das funções contínuas, foi demonstrado o Teorema de Tietze, que permite estender o domínio de funções contínuas, dadas algumas condições. Este teorema é importante para demonstrar outros resultados deste trabalho, principalmente quando se estuda separação do plano por caminhos simples e fechados.

No tópico central deste projeto, foram vistos alguns invariantes topológicos e demonstrado que tais objetos são de fato invariantes. Três deles merecem destaque. O primeiro é a compacidade, que quando são considerados subespaços euclidianos, é equivalente a dizer que o conjunto é fechado e limitado. Neste meio, o Teorema de Heine-Borel prova que um intervalo fechado da reta é compacto.

O segundo invariante topológico a ser demonstrado é a propriedade de conexidade, onde foram definidos também os espaços conexos por caminhos. É possível provar que qualquer conjunto conexo por caminhos é conexo. Isto significa que conexidade por caminhos também é invariante topológico.

O terceiro e último invariante topológico, que é importante enfatizar, é o grupo fundamental. Para definir grupos fundamentais é necessário conhecer as classes de homotopias. Eles permitem definir um grupo associado a cada espaço topológico. Este invariante algébrico permitiu, como primeira aplicação, demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, que afirma que qualquer aplicação contínua da bola nela mesma, deve ter pelo menos um ponto fixo.

Conclusões

O projeto realizado ao longo de um ano permitiu dar uma ótima introdução a Topologia Geral e à Topologia Algébrica. Este estudo apresentou o importante desenvolvimento da Topologia na matemática, que é uma teoria de caráter abstrato, entretanto extremamente geral, permitindo estender diversos conceitos, como de função contínua para funções cujo domínio não é euclidiano.

Além disso, a abordagem dos problemas em topologia se demonstram diferentes em relação a outras áreas da matemática, uma vez que este trata de conjuntos muitos gerais, onde a intuição que se tem do euclidiano, muitas vezes, deve ser posta de lado.

Em fim, pode-se concluir que a Topologia é muito rica no aspecto teórico, onde é possível conhecer uma nova visão da matemática, apresentando perspectivas para novos pensamentos em relação à pesquisa na matemática.

Agradecimentos

A Universidade Estadual de Maringá, pela bolsa concedida durante o período do projeto de pesquisa e ao meu orientador Ryuichi Fukuoka, pelo imenso esforço e paciência em me orientar.

Referências

[1] Armstrong M.A. **Basic Topology.** 1ª ed. Maidenhead: Springer Publisher, 1979
[2] James R. Munkres. **Topology.** 2 ª ed. Pearson, 2017.
[3] Elon Lages Lima. **Análise Real volume 1**. **Funções de uma variável.** 10ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.