ANÉIS NOETHERIANOS: UM OLHAR DA ÁLGEBRA COMUTATIVA.

Welinton Anderson Rocha (PIC/UEM), Maria Elenice Rodrigues Hernandes (Orientadora), e-mail: merhernandes@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas e da Terra/Maringá, PR.

Matemática/ Álgebra.

Palavras-chave: Ideais, Germes, Anel de Funções

Resumo:

É conhecido de estruturas algébricas que se A é um anel comutativo, ou um anel com elemento identidade, ou ainda um domínio de integridade, então o anel de polinômios A[x] também satisfaz a mesma propriedade, ou seja, o anel de polinômios herda certas propriedades do anel em que habitam seus coeficientes. Porém, existem determinadas propriedades do anel que não são satisfeitas para o anel de polinômios, como por exemplo, a propriedade de ser um domínio de ideais principais. Então uma pergunta a se fazer é: o que acontece com A[x] quando tem-se que A é um anel Noetheriano? Esta é uma pergunta que responderemos nesta apresentação.
Além disso, vamos explorar brevemente o anel de germes de funções reais, bem como o anel de germes de funções complexas, e analisar como estes se comportam com respeito à propriedade de ser ou não um anel Noetheriano.

Introdução:

O estudo de anéis teve seu início em 1871 com o matemático alemão Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916), originado pelo estudo da teoria de polinômios e dos inteiros algébricos. Porém, Dedekind não usou o termo “anel”, este feito foi realizado por Abraham Alevi (Adolf) Fraenkel (1891 - 1965), apesar da definição de anel dada por Fraenkel não ser a que conhecemos atualmente. Esta foi dada por Amalie Emmy Noether (1882 - 1935), matemática alemã que também dá nome aos conhecidos “Anéis Noetherianos”, que serão abordados nesta apresentação.
O objetivo principal deste trabalho é o estudo do anel de germes de funções, que possuem a origem como uma singularidade isolada. Um dos objetivos é caracterizar este anel do ponto de vista da Álgebra Comutativa, por exemplo, este é um anel local e a caracterização de seus ideais nos fornece uma maneira de determinar codimensões, que são uma ferramenta algébrica importante no estudo de tais germes. Observamos ainda que o anel de germes de funções reais não é Noetheriano, no entanto o é quando consideramos germes de funções complexas.

Materiais e métodos:

A pesquisa foi realizada por meio das referências citadas, com apresentações orais do acadêmico realizadas semanalmente, onde também eram discutidos todos os resultados para uma melhor absorção do conteúdo.

Resultados e Discussão:

O projeto teve início com o estudo da teoria geral de anéis, apresentada, por exemplo, em Atiyah e MacDonald (1969), focando nos anéis comutativos com identidade. Ao longo dessa parte introdutória alguns resultados nos levaram a perceber que os ideais (subconjuntos do anel que verificam certas propriedades) são de grande utilidade nessa teoria.
Também pudemos perceber que ao estudar a teoria de anéis é de extrema importância estudar a relação que os anéis possuem entre si, já que algumas propriedades podem ser mais fáceis de serem descritas em certos anéis. Visando isto, estudamos os chamados homomorfismos, que são funções que preservam a estrutura dos anéis.
Durante este estudo, focamos na classe dos anéis de polinômios e percebemos que muitas propriedades destes dependem diretamente do anel em que habitam os coeficientes. Neste sentido, diversos resultados sobre o anel de polinômios foram estudados durante o projeto. Entre os resultados, um dos principais será mostrado nesta apresentação, que é um célebre resultado da Álgebra Comutativa, conhecido como Teorema da base de Hilbert em homenagem ao matemático alemão David Hilbert (1862 – 1943) que o demonstrou em 1888.
Após o estudo dos anéis de polinômios estudamos o anel de séries de potências, veja, por exemplo, Eisenbud (1994), no qual também percebemos que são herdadas diversas propriedades do anel em que são tomados os coeficientes. Além disso, podemos estudar uma generalização do Teorema da base de Hilbert citado acima.
Por fim, focamos o estudo no anel de germes de funções reais, definido em Gibson (1979), que é um anel onde os elementos são classes de equivalência, em que a relação de equivalência é dada por uma propriedade local de funções. Neste anel podemos estudar suas propriedades, bem como perceber que este não é um anel Noetheriano.
Os últimos resultados do projeto foram focados no anel de germes de funções complexas, que é construído do mesmo modo que no caso real. Porém, com certos resultados que surgem neste anel, podemos mostrar que este é um anel Noetheriano.

Conclusões:

Com este projeto podemos concluir que o anel sobre o qual o anel de germes de funções é definido é muito relevante para a caracterização deste, como vimos no caso do anel de germes de funções reais e no anel de germes de funções complexas.

Agradecimentos:

A todos aqueles que me apoiam, Deus e à minha orientadora pela paciência e dedicação comigo sempre.

Referências:

ATIYAH, M. F.; MACDONALD, I. G., **Introduction to Commutative Algebra**. California. Addison–Wesley publishing, 1969.

EISENBUD, D., **Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry**. New York. Graduate Texts in Mathematics 150. Springer, 1994.

GIBSON, C. G., **Singular Points of Smooth Mappings**. London. Research notes in mathematics 25, Pitman, 1979.