28° Encontro Anual de Iniciação Científica
8° Encontro Anual de Iniciação Científica Júnior

28º EAIC
8º EAIC JR

10 e 11 de outubro de 2019

UMA INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA ALGÉBRICA: INVARIANTES E O GRUPO FUNDAMENTAL.

Henrique Tapparelo Moresco (PIC/CNPq/Uem), Patrícia Hernandes Baptistelli (Orientadora), e-mail: phbaptistelli@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas e da Terra /Maringá, PR.

Matemática / Geometria.

Palavras-chave: Invariante Topológico, Grupo Fundamental, Grupo Fundamental do Círculo

Resumo

A homotopia de caminhos pode ser vista como uma deformação contínua entre dois caminhos que possuem os mesmos pontos final e inicial. Ao estudar esse conceito, surge uma relação de equivalência e com ela uma estrutura algébrica natural na geometria, a de grupo. Esse grupo tem característica de invariante topológico e seu cálculo pode gerar consequências que se aplicam em muitas áreas da matemática, como no caso do grupo fundamental do círculo.

Introdução

Desde a famosa relação de vértices, faces e arestas do matemático suíço Leonhard Paul Euler (1707-1783) surgiram questionamentos sobre a existência de uma ferramenta para identificar os objetos em que a fórmula de Euler é satisfeita. O estudo de invariantes para essa fórmula foi uma das inspirações para o matemático francês Jules Henri Poincaré (1884-1912), que em seu trabalho intitulado de *Analysis Situs* deu origem aos conceitos de homotopia e de grupo fundamental.

Uma questão natural na topologia é decidir quando dois espaços topológicos são homeomorfos. Nesse sentido, os invariantes topológicos têm papel de destaque, pois se tratam de propriedades que são preservadas por homeomorfismos. Um exemplo é o grupo fundamental, que vem da ideia intuitiva de identificar se um espaço topológico possui buracos.

O grupo fundamental faz uma ligação entre o conceito algébrico de grupo e a topologia, pois trata de maneira algébrica problemas geométricos. A condição de invariante topológico não é a única aplicação do grupo fundamental. Por exemplo, o grupo fundamental do círculo pode ser utilizado para provar importantes resultados, tais como o teorema fundamental da álgebra e o teorema do ponto fixo de Brouwer.

O objetivo central desse trabalho é usufruir da condição de invariante topológico do grupo fundamental, investigando as relações entre a álgebra e a geometria no exemplo do círculo unitário.

Materiais e métodos

A pesquisa foi feita a partir de referências bibliográficas e apresentações orais. Das discussões orais, surgiram os esclarecimentos necessários à fixação dos conceitos e aplicações.

Resultados e Discussão

O conceito de homotopia é baseado na ideia de deformar continuamente uma aplicação contínua em outra. Nesse sentido, surge a concepção de homotopia de caminhos, que é a definição de homotopia adicionada as condições de que os caminhos têm o mesmo ponto inicial e o mesmo ponto final e, para cada tempo fixado da deformação, a homotopia é um caminho de mesmos pontos inicial e final. A relação de ser homotópico por caminhos é uma relação de equivalência com importantes implicações, como a construção do grupo fundamental. Tal grupo é formado pelas classes de equivalência para laços com um ponto base fixado e munido de uma operação específica. Verificamos a invariância desse grupo sobre homeomorfismos, o que o caracteriza como um invariante topológico.
Uma ferramenta que facilita o cálculo do grupo fundamental é a de espaços e aplicações de recobrimentos. Usamos esses conceitos para garantir a existência de uma aplicação conhecida como levantamento de caminhos e para calcular o grupo fundamental do círculo unitário, que é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros.
Como consequência desse cálculo, Munkres (2000) prova teoremas importantes no contexto geral da matemática, como o teorema fundamental da álgebra e o teorema do ponto fixo de Brouwer.

Conclusões

Concluímos que o grupo fundamental é uma ferramenta de grande importância, não só por sua característica de invariante topológico, mas também por entregar uma relação útil entre a álgebra e a geometria, que se provou produtiva por obter soluções para problemas clássicos de diversas áreas da matemática.

Agradecimentos

À minha orientadora, ao FNDE e ao PET.

Referências

Munkres, J. **Topology**. 2. ed. New Jersey: Pearson, 2000.