

Transformações Lineares e Sistemas Ortonormais Completos

Arissa Munakata Ghuidotti (PIBIC/CNPq/FA/UEM), Valéria Neves Domingos
Cavalvanti (Orientadora), e-mail: ra101366@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Matemática, Análise.

Palavras-chave: Espaços de Hilbert, Conjuntos Ortonormais, Identidade de Parseval.

Resumo:

No presente projeto estudamos os conjuntos ortonormais em espaços com produto interno. Quando o espaço munido de produto interno é completo, neste caso denominado Espaço de Hilbert, os resultados obtidos são particularmente interessantes. Nesta apresentação enunciaremos alguns resultados relevantes e apresentaremos a Identidade de Parseval.

Materiais e métodos

No que concerne os espaços de Hilbert e suas propriedades, usamos as referências [1] e [2]. Apesar destas referências abordarem espaços de dimensão infinita, vários resultados provados em dimensão finita, que são objetos do nosso estudo, permanecem válidos ou podem ser estendidos para dimensão infinita. Os resultados referentes à Álgebra Linear tiveram como apoio a referência [3].

Resultados e Discussão

De modo a obtermos o resultado central, ou seja, a Identidade de Parseval faz-se necessário alguns resultados e definições. No que segue, A denotará um conjunto ortonormal no máximo enumerável.

Teorema: Seja X um espaço com produto interno, A um conjunto ortonormal de vetores em X e y um vetor arbitrário de X . Então:

- $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in A, \sum_{i=1}^n |(y, x_i)|^2 \leq \|y\|^2$ (Desigualdade de Bessel).
- O conjunto $B = \{x \in A; (y, x) \neq 0\}$, é vazio ou no máximo enumerável.
- Se $z \in X$ então $\sum_{x \in A} |(y, x)(z, x)| \leq \|y\| \|z\|$.

Definição: Um conjunto ortonormal A em um espaço de Hilbert H é dito completo se não existir outro conjunto ortonormal de H que contenha A propriamente, isto é, A deve ser o conjunto maximal.

Proposição: Um conjunto ortonormal A é completo se, e somente se, para todo $u \in H$ tal que $u \perp A$ então $u = 0$.

Proposição: Seja H um espaço de Hilbert. Suponha que $A = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é um conjunto ortonormal em H e consideremos $u \in H$. Temos:

- a série $\sum_{i=1}^{+\infty} (u, v_i) v_i$ converge
- sendo $v \in H$ o vetor para o qual a série acima converge, então $v \in [A]$
- $u - v \perp [A]$
- $u \in [A] \Leftrightarrow u = v$.

Proposição: Suponhamos que $A = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é um conjunto ortonormal completo em um espaço de Hilbert H . Então $[A] = H$.

Proposição: Seja H um espaço de Hilbert e $A = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ um conjunto ortonormal em H . Então A é completo se, e somente se, para todo $u \in H$ é válida a equação:

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |(u, v_i)|^2 \text{ (Identidade de Parseval)}$$

Conclusões

Observemos que para obtermos o resultado principal, a saber, a Identidade de Parseval, foi de suma importância a hipótese de o espaço considerado ser Hilbert, além do conjunto ortonormal ser completo. O projeto foi desenvolvido em espaços de dimensão finita, no entanto, os resultados em dimensão infinita são de maior aplicabilidade e maior interesse na área de Equações Diferenciais Parciais.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPQ pela oportunidade e pelo apoio financeiro. O desenvolvimento do presente projeto me concedeu conhecimento nas áreas que possui o maior interesse e que desejo desenvolver meus estudos em nível de Pós-graduação.

Referências

- [1] Bachman, G. and Narici, L.; Functional Analysis, Dover Publications, New York, 2000.
- [2] Brézis, H., Análisis funcional –Teoría e aplicaciones, Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- [3] Hoffman, K. and Kunze, R.; Linear Algebra, Prentice-Hall, New Jersey, 1971.