

## FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ELEMENTOS DE CHAPA DE GEOMETRIA RETANGULAR

Milena Cardozo (PIBIC/AF/IS-CNPq-FA-UEM), Wilson Wesley Wutzow, e-mail: [wwwutzow@uem.br](mailto:wwwutzow@uem.br)

Universidade Estadual de Maringá / Centro De Tecnologia E Ciência / Maringá, PR.

**Área: Engenharia Civil, Subárea: Estruturas**

**Palavras-chave:** Elementos finitos, Estados planos, Métodos numéricos.

### Resumo:

O Método dos Elementos Finitos é um dos métodos numéricos mais usados para análises estruturais. Devido a sua importância, este trabalho foi direcionado ao estudo e formulação do mesmo para problemas elástico lineares isotrópicos em estado plano, com o uso de elementos de chapa retangulares. Em linhas gerais o Método dos elementos finitos (MEF) consiste em dividir o sólido em questão em um número de elementos que se possa fazer aproximações físicas e geométricas, com o auxílio de coordenadas homogêneas, a fim de se montar um sistema de equações que será resolvido com o uso de algoritmos de solução de sistemas lineares de equações, a fim de encontrar os deslocamentos dos nós dos elementos. A precisão dos resultados depende da discretização geométrica adotada para o problema em análise.

### Introdução

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma eficiente ferramenta numérica de resolução de problemas de meio contínuo. Esse é um dos métodos numéricos que se mostra mais eficiente em análises estruturais, e é, portanto, amplamente utilizado em programas computacionais (SORIANO, 2002). O método consiste em discretizar um sólido contínuo em elementos diminutos, mais fáceis de serem estudados, e a partir daí, estender a análise a todo o domínio (ASSAN, 2003). Isto posto, esse trabalho consistiu em desenvolver o MEF para o caso de elementos de chapa quadrangulares, deduzir e implementar utilizando algoritmo em C++ orientada a objetos a fim de resolver problemas estruturais que envolvam o estado plano de tensão e de deformação.

### Materiais e Métodos

#### *Fundamentos*

Alguns conceitos básicos sobre a teoria da elasticidade são necessários para a compreensão deste trabalho. Para os fundamentos a seguir, são pertinentes três

hipóteses básicas: Válido a consideração de pequenos deslocamentos onde o equilíbrio é verificado na posição inicial ou indeformada; Estado deformado é escrito em função do estado indeformado (Aproximação Lagrangiana); Material que constitui o sólido é elástico linear, homogêneo e isotrópico. Foram consideradas simplificações nos problemas, podendo assim serem caracterizados como estado plano de tensão ou de deformação.

### *Aproximações Adotadas Utilizando Coordenadas Homogêneas*

Para utilização de elementos quadriláteros de geometria arbitrária, se faz necessário uma transformação de coordenadas a fim de facilitar o trabalho com estes elementos. Assim, as coordenadas globais  $x$  e  $y$  serão descritas em função das coordenadas homogêneas ou locais  $\xi$  e  $\eta$ .

Este elemento apresenta funções interpoladoras lineares para os deslocamentos nodais em função das coordenadas homogêneas.

A passagem do sistema de coordenadas homogêneo para o cartesiano é efetuada por uma interpolação, semelhante a feita anteriormente para os deslocamentos, portanto as funções de forma são as mesmas.

### *Método da Energia*

Utilizando-se as equações clássicas da teoria da elasticidade, o vetor de deformações é dado pelas derivadas direcionais dos deslocamentos e o vetor de tensões é obtido multiplicando-se a matriz de elasticidade pelo vetor de deformações. A partir da manipulação destas, monta-se a matriz rigidez  $K$ , a partir de uma integração numérica e que será utilizada posteriormente em um sistema de equações.

A energia potencial total de um sistema elástico  $\pi$  é a soma da energia potencial dos esforços internos (ou energia de deformação)  $U$  e da energia potencial das cargas externas  $\Omega$ . Tem-se que, a energia das forças externas  $\Omega$  é igual ao trabalho  $T$  dessas forças, mas com sinal contrário, e a energia de deformação interna do sistema  $U$  é dada pela integral da densidade de energia  $u_e$  no volume do sistema, esta pode então ser obtida a partir do vetor de deslocamentos nodais e da matriz rigidez  $K$ .

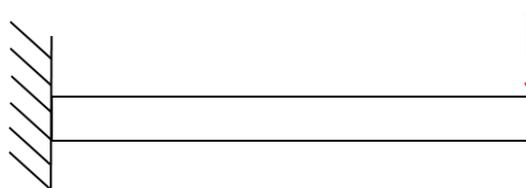
Na minimização do funcional da energia, deriva-se a equação da energia potencial total em relação aos deslocamentos nodais, e consideramos a derivada da energia total do sistema  $\pi$  sendo 0. Das derivadas necessárias a equação anterior, temos da energia interna  $U$  como sendo a multiplicação da matriz rigidez  $K$  pelo vetor de deslocamentos nodais. Assim como a derivada do trabalho  $T$  como sendo o vetor de forças aplicadas no sólido em cada nó.

A partir disso, cria-se um sistema linear de equações que será resolvido para obter os deslocamentos nodais do elemento.

### **Resultados e Discussão**

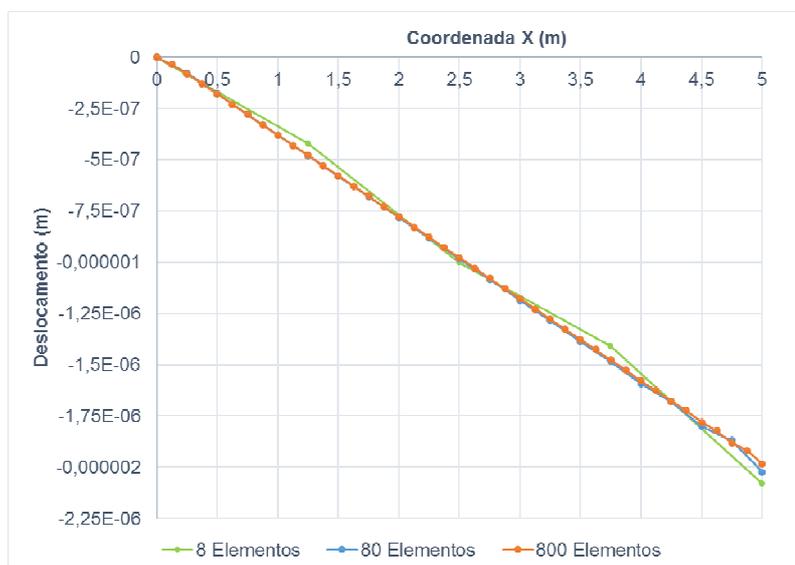
A partir do método desenvolvido, foi criado um algoritmo utilizando a programação orientada a objeto na linguagem C++ para calcular a matriz rigidez  $K$ , a partir dela, calcular aproximações dos deslocamentos dos pontos de uma superfície de chapa em estados planos, e com isso, também obter as tensões e deformações do sólido.

Para exemplificar, resolveu-se o mesmo problema com 3 discretizações diferentes: 8, 80 e 800 elementos. Trata-se de uma laje engastada em uma extremidade e com uma carga vertical na outra (Figura 1), de 5m de comprimento, 0,5m de altura e espessura unitária; com módulo de elasticidade 210 GPa, coeficiente de Poisson 0,3 e a carga de 50 kN. Utilizou-se o programa com a implementação do método descrito anteriormente (chapa em estado plano de deformação).



**Figura 1:** Laje engastada utilizada no exemplo.

A partir dos resultados obtidos com o programa, montou-se o Gráfico 1 que compara os deslocamentos obtidos entre as três discretizações.



**Gráfico 1 -** Gráfico ilustrativo dos deslocamentos obtidos com diferentes discretizações.

A partir do Gráfico 1, percebe-se que o número de elementos utilizado na malha do sólido tem grande influência na qualidade dos resultados. Porém, a precisão do resultado não necessariamente advém de um maior número de elementos, ou seja, existe uma discretização ideal cujos resultados seriam suficientes, fazendo-se desnecessário o uso de mais elementos, já que isto também aumentaria o custo computacional.

## Conclusões

Devido à grande utilidade do MEF, este trabalho teve por objetivo ser uma introdução ao método, visando a formulação do mesmo no caso de elementos de chapa retangulares e a partir disto, a criação de rotinas de cálculo das deformações de sólidos que se apliquem a este caso. Nota-se que uma boa precisão dos resultados é consequência de uma boa discretização do sólido em questão.

## Agradecimentos

Agradeço a minha família e amigos pelo apoio; ao meu orientador Wilson Wesley Wutzow; ao CNPq e a Fundação Araucária.

## Referências

ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos Primeiros Passos**. 2 ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2003.

SORIANO, H. L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.