

IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM LINGUAGEM C++ NA ANÁLISE DE PÓRTICOS 3D EM REGIME ELÁSTICO LINEAR UTILIZANDO A TEORIA DE REISSNER-MINDLIN

Enrico Tolardo de Lira (PIC/Uem), Wilson Wesley Wutzow (Orientador), e-mail: wwwutzow@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Tecnologia / Maringá, PR.

Área: Engenharia Civil, Subárea: Mecânica das estruturas.

Palavras-chave: métodos numéricos, método dos elementos finitos, implementação computacional, Reissner-Mindlin.

Resumo:

O trabalho apresentado constituiu na implementação de um programa computacional em linguagem C++ do Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando o modelo de Reissner-Mindlin, simplificado para pórticos espaciais. Buscou-se encontrar os deslocamentos e rotação sofridos pela estrutura submetida a esforços externos. Ao final do projeto foi possível validar o programa computacional comparando os resultados obtidos com um programa desenvolvido por Lira (2017), trabalho em que o modelo numérico foi verificado através da solução analítica.

Introdução

O uso de métodos numéricos aliados aos avanços na computação vem sendo utilizados cada vez mais na solução de problemas complexos na engenharia, proporcionando análises cada vez mais próximas da realidade. Entre eles se destacam o Método dos Elementos Finitos (MEF) e Método dos Elementos de Contorno (MEC), em que a escolha deles depende da aplicação a ser empregada e das vantagens que cada um oferece, do tipo da análise (linear ou não linear, dinâmico ou estático e etc) e o meio a ser modelado. (PACCOLA, 2004).

Neste trabalho, o desenvolvimento do programa baseou-se em aplicar o MEF para um elemento de pórtico 3D, para determinação dos deslocamentos da estrutura analisada.

As hipóteses adotadas para o desenvolvimento do elemento em estudo seguem o modelo proposto independentemente por Timoshenko (1921) para vigas, Reissner (1945) e Mindlin (1951) para placas e cascas. Segundo estes modelos as seções transversais planas (de vigas, placas ou chapas) permanecem planas, mas não necessariamente ortogonais à linha neutra, diferentemente do modelo de Bernoulli-Navier que impõe que as seções permanecerão planas e ortogonais a linha neutra após a deformação.

O elemento implementado foi deduzido com uma técnica semelhante a apresentada por Paccola(2004) que neste caso desenvolveu elementos de vigas, pórticos planos, pórticos 3D e cascas. Em Paccola (2001) foi deduzido o elemento de placa com esta mesma cinemática. Nesta pesquisa, assim como em Paccola(2004) e Paccola (2001), a rotação da seção transversal é considerada como grau de liberdade independente, ou seja, não é definida como a derivada do deslocamento vertical em relação ao eixo horizontal, nem como uma correção desta derivada para se introduzir a energia devida à força cortante na peça. Com isso, assume-se que seções planas permanecem planas, porém não necessariamente ortogonais ao eixo do elemento após a deformação.

Foi adotado um polinômio completo de grau 3 tanto para aproximar a deflexão quanto a rotação, independentes entre si.

Materiais e métodos

Utilizando as hipóteses da teoria de Reissner-Mindlin, com base nas relações entre deformação e deslocamento e na lei constitutiva do material ou seja a relação entre as tensões e deformações em regime elástico oriundas da teoria de resistência dos materiais, foi desenvolvido algebricamente o funcional que descreve a energia total do elemento em estudo, adotando-se uma aproximação em deslocamento e rotação independentes entre si através de um polinômio de grau 3. Devido à esta aproximação, foi necessário empregar um elemento de 4 nós onde cada nó contem 6 graus de liberdade (deslocamento e rotação nas três direções). Com isso foi deduzida uma matriz de rigidez de ordem 24, para um elemento finito de pórtico 3D de 4 nós.

Foi implementado um programa em C++, na interface gráfica do programa de desenvolvimento de software XCode, utilizando como base as matrizes e vetores desenvolvidos algebricamente. No programa foram criadas quatro classes de elemento finito: classe Nós, classe Elementos, classe Seção e classe Materiais, cada uma responsável em atribuir e calcular as características dos objetos oriundos destas classes. Para o aumento de compatibilidade entre sistemas operacionais programa é compilado via *makefile*, executado através da linha de comando e os resultados podem ser visualizados utilizando o *Paraview*.

Resultados e Discussão

No exemplo a seguir foi simulada uma viga engastada de seção retangular de altura $h=0,6$, base $b=0,15$ e comprimento $L=2,00m$, sob a qual foi aplicada uma carga distribuída uniformemente de 20 KN/M . Com ajuda do programa desenvolvido (MEF com a cinemática de Reissner-Mindlin), a deflexão e a rotação é comparada com os resultados obtidos por Lira (2017). Vale salientar que apesar do programa ser para pórticos espaciais no caso deste exemplo para fins de comparação com o trabalho de Lira(2017) que

neste caso era para um pórtico plano, o exemplo simulado é simplesmente uma viga.

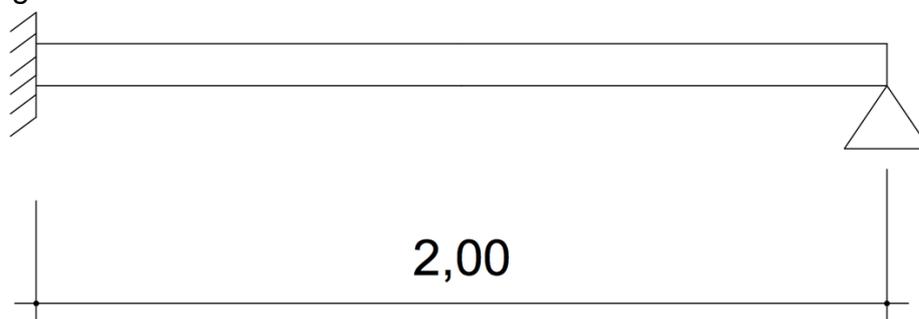


Figura 1: ilustração da viga do exemplo.

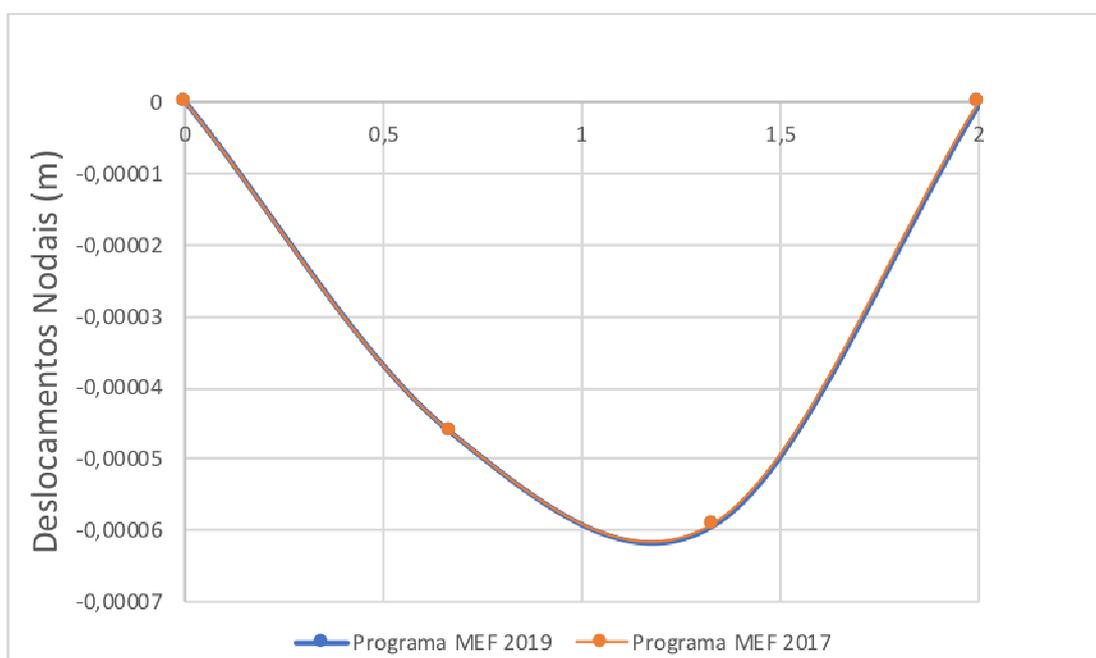


Figura 2: Deslocamentos encontrados nos programas desenvolvidos.

Uy MEF 2019	Uy MEF 2017	Diferença Percentual	ROTz MEF 2019	ROTz MEF 2017	Diferença Percentual
0	0	-	0	0	-
-4,622E-05	-4,622E-05	8,65501E-05	-4,207E-05	-4,207E-05	0,000118842
-5,907E-05	-5,907E-05	-3,04724E-05	3,189E-05	3,189E-05	-5,9575E-05
0	0	-	0,000105505	1,0551E-04	-

Figura 3: Diferença percentual dos resultados.

Conclusões

Pode se observar nos resultados apresentados que os deslocamentos calculados pelo programa está precisamente igual aos resultados do programa MEF 2017, tendo uma diferença menor que 0,00008%. O emprego da cinemática apropriada para o caso a ser simulado é fundamental

principalmente para a correta estimativa da deflexão do elemento. O emprego de uma linguagem moderna e orientada a objeto auxilia na organização do código evitando assim erros de implementação.

Referências

MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates, **Journal of Applied Mechanics** 18 (1951), 31–38.

PACCOLA, R. R. (2001). **Estudo de formulações de placas laminadas apoiadas sobre base elástica**. Campinas. (Discertação de Mestrado) - Departamento de Estruturas, UNICAMP. 139 p.

PACCOLA, R. R. (2004). **Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da combinação entre o MEC e o MEF**. São Carlos. (Tese de Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC/USP. 190 p.

REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, **Journal of Applied Mechanics** 12 (1945), 69–76.

TIMOSHENKO, S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, **Philosophical Magazine** 41 (1921), 744–746.

LIRA, B. T. **Modelo de Viga de Reissner Mindlin aplicado ao Métodos dos Elementos Finitos para análise de vigas submetidos à flexão**. 2017. Programa de Iniciação Científica – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2017.