PROGRAMAÇÃO LINEAR APLICADA A UM PROBLEMA DE EMPACOTAMENTO

Pedro Henrique da Silva Pinto (PIBIC/CNPq/FA/Uem), Francisco Nogueira Calmon Sobral (Orientador), e-mail: fncsobral@uem.br, Wesley Vagner Ines Shirabayashi (Co-orientador), e-mail: wvishirabayashi@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Departamento de Matemática/Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra, Matemática.

Palavras-chave: Empacotamento, Programação Linear, Simplex

Resumo:

Um problema de empacotamento é um problema no qual se deseja alocar itens dentro de um determinado local. Neste projeto, procura-se escrever o problema de forma que seja possível resolvê-lo usando o Simplex (BAZARAA, 1977), um método de programação linear. Sendo assim, o problema deverá ser escrito considerando um espaço formado por um polígono convexo, onde serão alocados alguns quadrados. Os lados desse polígono convexo serão escritos como restrições de um problema de programação linear. Foram pensados dois métodos para a modelagem do problema, onde ambos consideravam apenas um quadrado por vez, pois logo após o problema ser resolvido, esses métodos seriam aplicados novamente, e assim sucessivamente até que a figura convexa fosse inteiramente preenchida por esses itens. A diferença entre cada método é o número de vértices do quadrado considerados simultaneamente. Essa diferença gera vantagens e desvantagens, que serão discutidas a fim de encontrar o melhor método. Foi desenvolvido um programa na linguagem de programação Python que aplica o método de modelagem julgado mais eficiente. Em seguida, resolve o problema para tantos quadrados quando forem possíveis, informando a quantidade deles que foi alocada e exibindo uma solução gráfica. Espera-se conseguir empacotar o máximo de quadrados possível dentro desta região poligonal convexa, para obter um melhor aproveitamento do espaço presente nela. A ideia é resolver o problema de empacotar produtos de forma a minimizar o frete.

Introdução

Problemas de empacotamento são muito frequentes no transporte de produtos. Geralmente, como aponta (MIYAZAWA, 2019), esses produtos são alocados em contêineres, e a má utilização do espaço contido neles pode acarretar na necessidade de se transportar os produtos excedentes em outros contêineres, o que torna o transporte mais caro. O problema de empacotamento procura obter um melhor aproveitamento desse espaço, consequentemente diminuindo o número de contêineres necessários para o transporte das mercadorias. O problema a ser resolvido é um problema de alocação de itens quadrados em uma região limitada, como por exemplo, um contêiner.

Materiais e métodos

De acordo com (QUEIROZ, 2008), um problema de programação linear é escrito da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\text{min } & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
\text{sujeito a: } & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m
\end{aligned}
$$

Aqui, temos as variáveis x_j, com $1 \leq j \leq n$, a função objetivo $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ a ser minimizada, e as restrições $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$, com $1 \leq i \leq m$.

Para a modelagem do problema de empacotamento como um problema de programação linear, o primeiro passo é reescrever os lados do polígono convexo na forma de restrições. Para reescrever cada lado de um polígono convexo arbitrário na forma de restrições, considere três vértices consecutivos x_1, x_2, x_3, onde $x_1 = (u_1, u_2)$ e $x_2 = (w_1, w_2)$. A reta $Ax + By = K$, formada por x_1 e x_2, terá coeficientes $A = \frac{w_2 - u_2}{w_1 - u_1}$, $B = -1$ e $K = \frac{w_2u_1 - w_1u_2}{w_1u_1}$. Essa reta poderá ser transformada em uma restrição correspondente a este lado realizando o seguinte teste: considere $x_3 = (f, g)$. Se $Af + Bg > K$, então a restrição correspondente será $Af + Bg \geq K$. Por outro lado, se $Af + Bg < K$, então a restrição será $Af + Bg \leq K$.

O problema que surge em seguida é que as restrições se aplicam apenas ao ponto (x, y), ou seja, apenas a um ponto, enquanto que um quadrado possui infinitos pontos tanto em seus lados quanto em seu interior. Como seria possível julgar se o quadrado está posicionado no interior da figura convexa desta forma? O primeiro método de modelagem tenta resolver isso reescrevendo as restrições, de forma que seja possível julgar se o quadrado está posicionado dentro desta região analisando apenas um ponto. Considere um quadrado de lado l, cujos vértices são $E = (x, y)$, $F = (x + l, y)$, $G = (x + l, y + l)$ e $H = (x, y + l)$. Com esses vértices, podemos formar os seguintes vetores: $\overrightarrow{EE} = (0,0)$, $\overrightarrow{EF} = (l,0)$, $\overrightarrow{EG} = (l,l)$ e $\overrightarrow{EH} = (0,l)$. Vamos atualizar uma restrição da forma $ax + by \geq c$, correspondente ao lado do polígono convexo formado por x_1 e x_2. Agora, é necessário subtrair um vetor ideal $\vec{v}$ ao ponto x_1 (ou ao ponto x_2). Esse vetor será um dos que foram formados anteriormente. Para descobrir qual deles será o vetor ideal, realizamos o seguinte teste:

1. Se E é tal que $ax+by \geq c$, então F,G,H respeitarão a restrição $ax+by \geq c$ se $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Nesse caso, podemos escolher $\overrightarrow{EE}$ como o vetor ideal.
2. Se F é tal que $a(x+l)+by \geq c$, então E,G,H respeitarão a restrição $ax+by \geq c$ se $a \leq 0$ e $b \geq 0$. Nesse caso, podemos escolher $\overrightarrow{EF}$ como o vetor ideal.
3. Se G é tal que $a(x+l)+b(y+l) \geq c$, então E,F,H respeitarão a restrição $ax+by \geq c$ se $a \leq 0$ e $b \leq 0$. Nesse caso, podemos escolher $\overrightarrow{EG}$ como o vetor ideal.
4. Se H é tal que $ax+b(y+l) \geq c$, então E,F,G respeitarão a restrição $ax+by \geq c$ se $a \geq 0$ e $b \leq 0$. Nesse caso, podemos escolher $\overrightarrow{EH}$ como o vetor ideal.

Se ocorrerem dois casos simultaneamente, dos dois vetores podemos escolher qualquer um.

Ao subtrair $\vec{v}$ de x_1, obtemos um ponto P. Suponha que $P=(r,t)$. A constante c da restrição original será atualizada, e seu novo valor será $c=ar+bt$. Isso é feito com todas as restrições.

O segundo método de modelagem foi criado pensando em evitar ter que escolher um vetor ideal. Alguns cálculos foram realizados e chegou-se a conclusão de que é possível simplesmente aplicar cada restrição a todos os vértices, isto é, se a restrição for $ax+by \geq c$, então teríamos 4 restrições: $ax+by \geq c$, $a(x+l)+by \geq c$, $a(x+l)+b(y+l) \geq c$ e $ax+b(y+l) \geq c$.

O programa que foi desenvolvido em Python é capaz de modelar e resolver os problemas, dados os vértices do polígono convexo e o tamanho do lado dos quadrados. Ele rotaciona o polígono antes de resolver, para posicionar os quadrados sobre o lado maior da figura. A solução é apresentada depois de as rotações serem desfeitas. Para um polígono de vértices $(1,0)$, $(1,20)$ e $(20,0)$, e quadrados de lado 5, o programa apresenta a solução dada pela Figura 1:

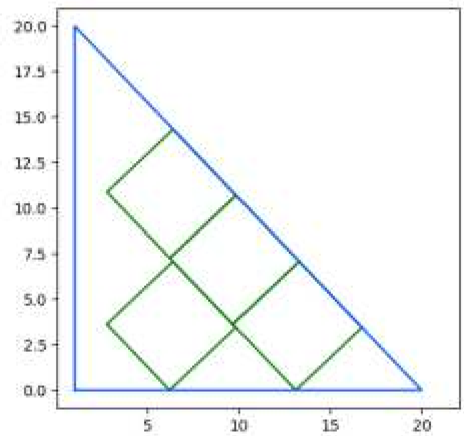

Figura 1 – Solução encontrada pelo programa, com 4 quadrados alocados.

De (BIRGIN, 2010), foram selecionados os problemas 12, 13, 14, 15 e 16, e quando (BIRGIN, 2010) os resolve permitindo apenas rotações de 90º em cada quadrado, suas soluções conseguem alocar um quadrado a mais que o programa criado nos problemas 12 e 13, mas para os problemas restantes, ambos conseguem alocar a mesma quantidade de quadrados.

Resultados e Discussão

O primeiro método de modelagem facilita a resolução do problema, visto que não aumenta o número de restrições, como ocorre no segundo método. O segundo método consegue eliminar a escolha do vetor ideal, e facilita a modelagem, embora aumente o número de restrições. O programa criado foi capaz de resolver o problema para vários quadrados. Ele preenche a figura convexa com os quadrados até que não haja mais espaço disponível. Suas soluções são razoavelmente boas.

Conclusões

Neste projeto foi estudada a otimização matemática em problemas de programação linear, para que fosse possível adaptar um problema de empacotamento e resolvê-lo utilizando programação linear e o método Simplex. Com relação à modelagem do problema, o primeiro método se mostrou mais eficaz que o segundo, pois gera um número de restrições menor, facilitando o processo de resolução do problema. O programa para solucionar problemas de empacotamento por meio de programação linear foi criado e apresenta soluções gráficas interessantes em um tempo relativamente curto.

Agradecimentos

Quero agradecer à Fundação Araucária (3095/2018) pela ajuda financeira, ao meu orientador por sempre me guiar na direção certa quando surgem as dúvidas, e a minha família pelo apoio e incentivo que sempre dão.

Referências

BAZARAA, MOKHTAR S.; JARVIS, JOHN J. **Linear Programming and Network Flows.** Atlanta: School of Industrial and Systems Engineering Georgia Institute of Technology, 1977.
BIRGIN, E. G.; LOBATO, R. D. **Orthogonal packing of identical rectangles within isotropic convex regions.** Disponível em: < https://www.ime.usp.br/~egbirgin/publications/bl.pdf > Acesso em: 25 de Julho de 2019.
MIYAZAWA, F. K. **Problemas de Corte e Empacotamento.** Disponível em: < https://www.ic.unicamp.br/~fkm/problems/empacotamento.html > Acesso em: 25 de Julho de 2019.
QUEIROZ, M. **Programação Linear - Notas de Aula.** São Paulo: USP, 2008.