# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS À ENGENHARIA CIVIL

Felipe Guilherme da Silva Bassaco (PIBIC/CNPq/FA/UEM), Juan Amadeo Soriano Palomino (Orientador). E-mail: jaspalomino@uem.br

Universidade Estadual de Maringá/Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

**Ciências Exatas e da Terra /Matemática**

**Palavras-chave:** diferenças finitas, deflexão em vigas, equações diferenciais

**Resumo:**

Determinar a deflexão de elementos rígidos para garantir a segurança e utilidade de uma estrutura. Este artigo apresenta a comparação entre a solução numérica e a analítica da Equação Linear da Linha Elástica, cuja solução numérica foi obtida por meio do Método das Diferenças Finitas.

## Introdução

A deflexão de vigas é importante para o cálculo estrutural visto que o seu valor máximo é uma especificação de projeto. E, ainda, o conhecimento da deformação é necessário para analisar vigas estaticamente indeterminadas, ou seja, o número de equações de equilíbrio é menor que o número de reações de apoio (BEER, 2011).

## Materiais e métodos

O método utilizado para a determinação da deflexão de vigas analiticamente será a solução da Equação Diferencial Ordinária denominada Equação da Linha Elástica, que é escrita de três formas equivalentes:

$$v^{(4)} = -\frac{q}{EI}, \quad v^{(3)} = \frac{V}{EI}, \quad v^{(2)} = \frac{M}{EI} \tag{1}$$

onde v é a função da deflexão, q o carregamento distribuído uniformemente na viga, E o módulo de elasticidade do material, I o momento de inércia da seção transversal, V o esforço cortante e M o esforço de momento fletor.

As Condições de Contorno são devidas aos apoios que sustentam a viga, sendo que, engaste impedem a deflexão e a deformação angular da seção e apoios de primeiro e segundo gênero impedem apenas a deflexão.

Por outro lado, para o método numérico utiliza-se o Método das Diferenças Finitas (MDF), através das equações de diferenças centradas de segunda ordem:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} \tag{2}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} \tag{3}$$

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{v_{i+2} - 4v_{i+1} + 6v_i - 4v_{i-1} + v_{i-2}}{h^4} \tag{4}$$

para i= 1, ..., m, em que m é um número inteiro positivo elegido e h=(b-a)/(m-1) o tamanho do passo dado para discretização do intervalo [a,b].

## Resultados e Discussão

A aplicação do Método das Diferenças Finitas nas equações (1) resultara nas equações a seguir,

$$v_{i+2} - 4v_{i+1} + 6v_i - 4v_{i-1} + v_{i-2} = \frac{qh^4}{EI}, \qquad i = 0, \dots, m. \tag{5}$$

$$v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} = \frac{Mh^2}{EI}, \qquad i = 0, \dots, m. \tag{6}$$

Desta forma, o método consistirá em resolver as equações (5) e (6) em forma de sistema de equações. O desenvolvimento da equação (5) resulta no sistema (7) e o da (6) no sistema (8),

$$\begin{cases} v_3 - 4v_2 + 6v_1 - 4v_0 + v_{-1} = \dfrac{qh^4}{EI} \\ v_4 - 4v_3 + 6v_2 - 4v_1 + v_0 = \dfrac{qh^4}{EI} \\ (\dots) \\ v_{m+1} - 4v_m + 6v_{m-1} - 4v_{m-2} + v_{m-3} = \dfrac{qh^4}{EI} \\ v_{m+2} - 4v_{m+1} + 6v_m - 4v_{m-1} + v_{m-2} = \dfrac{qh^4}{EI} \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} v_1 - 2v_0 + v_{-1} = \dfrac{Mh^2}{EI} \\ v_2 - 2v_1 + v_0 = \dfrac{Mh^2}{EI} \\ (\dots) \\ v_{m+2} - 2v_{m+1} + v_m = \dfrac{Mh^2}{EI} \\ v_{m+1} - 2v_m + v_{m-1} = \dfrac{Mh^2}{EI} \end{cases} \tag{8}$$

A solução dos sistemas (7) e (8) não é imediata, uma vez que o número de incógnitas é maior que o número de equações, numericamente, para o primeiro caso terão (m) equações e (m+4) incógnitas já o segundo (m) equações e (m+2) incógnitas.
As condições de contorno forneceram o exato número de equações para a solução do sistema. Nos pontos que existirem apoio ou engaste a deflexão deste ponto será zero. Além disso, nos engastes a deformação angular da seção da viga será zero

também, ou seja, a derivada da deflexão será zero, aplicando esse resultado na equação (2) obtém-se:

$$v_{i+1} = v_{i-1}. \qquad (9)$$

A deflexão das lajes é descrita pela equação de Lagrange,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{12p(1-\nu^2)}{Eh^3}$$

onde, w é a função que representa os deslocamentos verticais, p é a carga total uniformemente distribuída, E o módulo de elasticidade, h a espessura da placa e $\nu$ o coeficiente de Poisson.

Tendo em vista, que esta é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) a aplicação do Método das Diferenças Finitas aplicado a vigas associadas que representariam a laje proporciona a solução de uma EDP por meio da solução numérica de Equações Diferenciais Ordinárias.
Vale salientar, que as condições de contorno geram restrições a aplicação efetiva do método numérico, ou seja, a aplicação do Método das Diferenças Finitas ao problema de lajes deverá passar por um estudo prévio. Por último, a aplicação do método numérico a problemas de lajes é possível, porém, a efetividade e os erros gerados deverão ser estudados para comprovar a aplicabilidade do método.

## Conclusões

O Método das Diferenças Finitas, através das equações de diferenças centradas de 2ª ordem é aplicável aos problemas de deflexão de vigas no regime elástico. E, ainda, este método numérico poderá ser aplicado a lajes desde que as condições de contorno possibilitem a solução do problema de vigas.

## Agradecimentos

Agradeço a CNPq pelo apoio financeiro e a UEM pela infraestrutura.
Ao Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino, coordenador do projeto, pela oportunidade, apoio e orientação.
Ao Prof. Dr. Adilandri Mércio Lobeiro pela orientação e apoio durante este período.
À Profª. Ms. Lígia Bittencourt Ferraz de Camargo pela confiança e orientação.

## Referências

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. Jr.; **Resistência dos materiais.** 5ª Edição. São Paulo: McGraw-Hill, 2011.
RUGGIERO, M. A. G. LOPES, V. L. R.; **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.** 2ª Edição. São Paulo: Pearson.