29º Encontro Anual de Iniciação Científica
9º Encontro Anual de Iniciação Científica Júnior
29ºEAIC 9ºEAIC JR
29 a 31 de outubro de 2020

DOMÍNIOS DE ORE E CORPOS DE FRAÇÕES NÃO COMUTATIVOS

Nathália Lisandro Toppa (PIBIC/CNPq/FA/Uem), Érica Zancanella Fornaroli (Orientadora), e-mail: ra99684@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas / Maringá, PR.

Matemática / Álgebra

Palavras-chave: corpo de frações, domínio de Ore, álgebra livre.

Resumo:

Neste projeto, vimos como a construção do corpo de frações de um domínio de integridade comutativo se generaliza para o contexto de domínios não comutativos. Para os domínios de Ore, assim como no caso comutativo, o "corpo" de frações é único, a menos de isomorfismo. No entanto, se o domínio não comutativo em questão não é de Ore, então, mesmo quando existe, o "corpo" de frações não é necessariamente único.

Introdução

Por definição, um anel comutativo R é um domínio (de integridade) se R não contiver divisores de zero, isto é, se para todos $a,b \in R$, $ab=0$ implicar $a=0$ ou $b=0$. Dado um anel comutativo R, dizemos que um par (K,ρ), onde K é um corpo e $\rho:R\to K$ é um homomorfismo injetor, é um *corpo de frações* de R se para todo subcorpo L de K que contém $\rho(R)$ tivermos $L=K$. É bastante conhecido que um anel comutativo R é um domínio se, e somente se, R tiver um corpo de frações. Além disso, tal corpo de frações é único, a menos de isomorfismo.

No caso em que R não é comutativo, é claro que não existe um homomorfismo injetor de R em um corpo. Neste caso, podemos "retirar" a comutatividade do corpo, ou seja, considerar um anel com divisão, e obter a seguinte definição: seja R um anel não necessariamente comutativo. Um par (D,ρ), onde D é um anel com divisão e $\rho:R\to D$ é um homomorfismo injetor, é um *anel com divisão de frações* de R se para todo subanel com divisão L de D que contém $\rho(R)$ tivermos $L=D$.

Ao contrário do que acontece no caso comutativo, existem domínios não comutativos que não podem ser imersos em um anel com divisão. O primeiro exemplo de um domínio com essas características foi construído por A. I. Malcev em 1937. Tratamos nesse projeto de um problema mais específico: descrever os anéis R que possuem anéis com divisão de frações

(D,ρ) tais que os elementos de D podem ser escritos na forma $\rho(a)\rho(b)^{-1}$, com $a,b \in R$, $b\neq 0$. Tais anéis são exatamente os domínios de Ore à direita.

Materiais e métodos

Durante o desenvolvimento do projeto foram realizadas apresentações de seminários semanais com o objetivo de suprir possíveis dúvidas e apresentar os resultados obtidos durante o estudo semanal. A principal referência bibliográfica utilizada foram as notas do minicurso "Corpos de frações não comutativos" apresentado na IX Jornada de Álgebra, por FERREIRA. Também foram utilizadas as referências complementares BAGIO e COHN.

Resultados e Discussão

Na primeira parte do projeto, recordamos algumas propriedades de anéis e corpos e a construção do corpo de frações de um domínio comutativo. Por definição, um anel (com unidade) é um conjunto não vazio R munido de duas operações binárias chamadas adição e multiplicação, que satisfazem algumas condições, sendo elas: as duas operações são associativas, a adição é comutativa, existe um elemento neutro com respeito à adição (0_R) e um elemento neutro com respeito à multiplicação (1_R) tal que 1_R e 0_R são elementos distintos, todo elemento de R possui um inverso com respeito à adição e a multiplicação é distributiva relativamente à adição. Se a multiplicação é comutativa, R é dito um anel comutativo. Um anel R é chamado de domínio se o produto de quaisquer dois elementos não nulos de R é um elemento não nulo (lei do anulamento do produto). Os conjuntos dos números inteiros, dos números racionais e dos números reais são exemplos de domínios comutativos com as operações de adição e multiplicação usuais. Um anel D tal que todo elemento não nulo possui inverso multiplicativo é chamado de anel com divisão e um anel com divisão comutativo é chamado de corpo. Por exemplo, os anéis dos números racionais e dos números reais são corpos. Mais geralmente, todo anel com divisão e, portanto, todo corpo, é um domínio. A recíproca não é verdadeira. Por exemplo, o anel dos números inteiros é um domínio, mas não é um anel com divisão.
Posteriormente, generalizamos a construção do corpo de frações de um domínio comutativo para um domínio não comutativo R. Neste caso, é claro que não existe um homomorfismo injetor de R em um corpo, pois um corpo é comutativo. Então, neste caso, consideramos um anel com divisão. Dessa forma, dizemos que R tem um anel com divisão de frações se existir um anel com divisão D e um homomorfismo injetor $\rho: R\to D$ tal que para todo subanel com divisão L de D que contém $\rho(R)$ tivermos $L=D$. Como $\rho(R)$ é um subanel de D, neste caso, $\rho(R)$ e, portanto, R será um domínio. Por outro lado, como já dissemos, nem todo domínio não comutativo possui um anel com divisão de frações.

O principal objetivo do projeto foi descrever os anéis *R* que possuem anéis com divisão de frações (D,ρ) tais que os elementos de *D* podem ser escritos na forma $\rho(a)\rho(b)^{-1}$, com $a,b \in R,\ b\neq 0$. Tais anéis são exatamente os domínios de Ore à direita: um anel *R* é um *domínio de Ore à direita* se *R* for um domínio e se para todos $a,b \in R\backslash\{0\}$, $aR\cap bR\neq\{0\}$.
A construção do anel com divisão de frações de um domínio de Ore à direita é análoga à construção do corpo de frações de um domínio comutativo. Além disso, assim como no caso comutativo, o anel com divisão de frações de um domínio de Ore à direita é único, a menos de isomorfismo.
Finalizamos a nossa pesquisa estudando um domínio não comutativo que não é um domínio de Ore nem à direita nem à esquerda, mas possui um anel com divisão de frações, que não é único a menos de isomorfismo. Tal domínio é a álgebra associativa livre em duas indeterminadas não comutativas sobre um corpo, que possui infinitos anéis com divisão de frações não dois a dois isomorfos.

Conclusões

Neste projeto, foram apresentados alguns conceitos a respeito de anéis e corpos, com o intuito de estudarmos domínios comutativos e não comutativos. Vimos que todo domínio comutativo tem um corpo de frações que é único, a menos de isomorfismo. Vimos também que os domínios de Ore são uma generalização dos domínios comutativos e que estes também têm "corpos" de frações únicos a menos de isomorfismo. Finalmente, vimos que a álgebra associativa livre é um exemplo de domínio não comutativo que não é um domínio de Ore nem à direita nem à esquerda, porém possui infinitos anéis com divisão de frações não isomorfos.

Agradecimentos

Agradeço à UEM por ter auxiliado financeiramente essa pesquisa e à minha orientadora pela oportunidade que me deu de estudar novos assuntos que não são vistos durante a graduação, que foram importantes e acrescentaram no meu conhecimento matemático.

Referências

BAGIO, D. **Anéis quocientes clássicos e localização não comutativa**. 2000. 101f. Dissertação (Mestrado)-Programa de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

COHN, P. M. **An introduction to ring theory**. London: Springer, 2000.

FERREIRA, V. O. **Corpos de frações não comutativos**. Em: IX Jornada de Álgebra. Maringá: 2017.