

PROGRAMAÇÃO LINEAR APLICADA A UM PROBLEMA DE EMPACOTAMENTO

Pedro Henrique da Silva Pinto (PIBIC/CNPq/FA/Uem), Francisco Nogueira Calmon Sobral (Orientador), e-mail: fncsobral@uem.br, Wesley Vagner Ines Shirabayashi (Co-orientador), e-mail: wwishirabayashi@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Departamento de Matemática/Maringá,
PR.

Ciências Exatas e da Terra, Matemática.

Palavras-chave: Empacotamento, Programação Linear, Simplex

Resumo:

Neste projeto, procura-se resolver um problema de empacotamento de itens poligonais convexos em uma região poligonal também convexa. O objetivo é empacotar o maior número de itens possível no interior da região convexa. Para resolver este problema, uma abordagem em programação linear será utilizada. O problema de empacotamento será adaptado para um problema de programação linear, que em seguida será resolvido utilizando o método Simplex. Posteriormente, serão consideradas rotações ortogonais para cada item empacotado.

Introdução

Problemas de empacotamento estão presentes no cotidiano de empresas que transportam mercadorias. Esses produtos são alocados em contêineres, e é interessante alocar o máximo possível deles em um único contêiner, pois isso minimiza o custo do transporte. Neste trabalho, deseja-se resolver um problema de empacotamento de polígonos convexos no interior de um polígono convexo usando uma abordagem de programação linear. Em (CHEN, 2003), são resolvidos problemas de empacotamento 2D de objetos irregulares, buscando alocá-los sem sobreposição de forma a maximizar a área ocupada por eles dividido pela área do local (contêiner). Foram utilizados Algoritmos Genéticos, Busca Tabu e Guloso como formas de abordar o problema. Já em (KOTHARI, 1989), procurou-se encontrar um posicionamento ótimo de polígonos convexos em um espaço retangular. Foi apresentada uma estratégia de empacotamento heurística, que foi estendida para o caso de polígonos não convexos. Em (GOMES, 2006), trabalhou-se com problemas de corte e empacotamento, onde deve-se cortar um material em pedaços menores de tamanhos padronizados, buscando-se reduzir o desperdício do material. Foi trabalhado com problemas de aninhamento, onde os objetos podem variar em tamanho e forma, e peças menores podem ser orientadas de maneira arbitrária. O material usado possui altura fixa, e um algoritmo de *simulated annealing* foi utilizado para encontrar as soluções. Em (GALIEV, 2016), procurou-se empacotar polígonos convexos regulares. O raio da circunferência onde o polígono convexo regular está circunscrito foi entendido como um parâmetro do polígono. Um algoritmo foi desenvolvido para encontrar a solução do problema de forma a maximizar a área total dos polígonos empacotados. Foram resolvidos problemas com polígonos idênticos e com polígonos de dois parâmetros dados. Em (BIRGIN, 2006), buscou-se empacotar itens em regiões convexas por uma abordagem baseada no conceito de sentinelas, que permite alocar itens sem sobreposição. Esse método permite rotações arbitrárias dos itens, que podem ser desde retângulos idênticos e polígonos regulares até outras figuras convexas e não convexas.

Materiais e métodos

Um problema de programação linear é escrito da seguinte forma:

$$\min C^T X$$

sujeito a: $AX \leq B$

$$X \geq 0,$$

onde $A = [a_{i,j}]_{m \times n}$, $B = [b_i]_{m \times 1}$, $C = [c_i]_{n \times 1}$ e $X = [x_i]_{n \times 1}$ são matrizes com entradas reais. O valor $C^T X$ é chamado de função objetivo, $AX \leq B$ são as restrições do problema, e X é o vetor cujas entradas são as variáveis do problema.

Considere um polígono de vértices V_1, V_2, \dots, V_n . Por um vértice V_i e seu sucessor, calcula-se a equação de uma reta da forma $a_i x + b_i y = c_i$. Agora, substituindo nessa equação as coordenadas de algum vértice diferente de V_i e seu sucessor, verifica-se se ocorre $a_i x + b_i y \leq c_i$ ou $a_i x + b_i y \geq c_i$. A inequação válida será a restrição correspondente a V_i . Caso ocorra $a_i x + b_i y \geq c_i$, multiplica-se ambos os lados da inequação por (-1) . Realizando este processo, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, constrói-se todas as restrições do problema.

Para a modelagem do problema de empacotamento de polígonos convexos em uma região convexa sem rotação dos itens poligonais a serem alocados, considere um polígono de vértices P_1, P_2, \dots, P_l . Chamaremos P_1 de ponto de posição, e suas coordenadas x e y serão as variáveis do problema. Para garantir que todos os outros vértices satisfaçam as restrições do problema, será necessário fazer uma correção em cada restrição. Para isso, vamos definir que qualquer vetor com origem em P_1 e extremidade em um vértice qualquer deste mesmo polígono será chamado de candidato a vetor ideal. Para cada restrição $a_i x + b_i y \leq c_i$, será escolhido um vetor $I_i = (x_i, y_i)$, entre os candidatos a vetor ideal, para que a restrição seja corrigida para o formato $a_i x + b_i y \leq c_i - a_i x_i - b_i y_i$, pois se P_1 satisfaz a restrição corrigida, todos os outros vértices deste mesmo polígono satisfarão $a_i x + b_i y \leq c_i$. O vetor I_i será chamado vetor ideal para uma restrição $a_i x + b_i y \leq c_i$. Para escolher o vetor ideal associado a uma restrição, basta saber qual é a sua extremidade. O Teorema 1 será usado para descobrir a extremidade de cada vetor ideal.

Teorema 1. *Seja uma restrição da forma $ax + by \leq c$ e um polígono convexo de vértices P_1, P_2, \dots, P_l . Considere $\vec{n} = (a, b)$. Se para algum $j \in \{1, 2, \dots, l\}$, $\vec{n} \overrightarrow{P_j P_{j+1}} \leq 0$ e $\vec{n} \overrightarrow{P_j P_{j-1}} \leq 0$, onde P_{j+1} denota o sucessor de P_j , e P_{j-1} seu antecessor, então a extremidade do vetor ideal será P_j .*

Para a modelagem do problema de empacotamento de polígonos convexos em uma região convexa com rotação ortogonal dos itens poligonais a serem alocados, considere agora um polígono $P_1P_2 \dots P_l$, e construa $Q_1Q_2 \dots Q_l$ tal que $Q_1 = (x, y)$ e $Q_j = Q_1 + M(\theta)\overrightarrow{P_1P_j}, \forall j \in \{1, 2, \dots, l\}$, onde $M(\theta)$ é a matriz de rotação calculada em θ . Para cada restrição $a_i x + b_i y \leq c_i$, substitui-se x e y pelas coordenadas de cada vértice do polígono $Q_1Q_2 \dots Q_l$, gerando novas l restrições, para cada restrição $a_i x + b_i y \leq c_i$, onde essas l novas restrições substituirão a restrição $a_i x + b_i y \leq c_i$ correspondente. No total, haverá $n \cdot l$ restrições para o problema modelado.

Para cada uma das modelagens descritas acima, foi criado um programa na linguagem de programação *Python* capaz de modelar e resolver cada um dos problemas de forma recursiva, com o fim de alocar os itens no interior da região convexa dada.

Resultados e Discussão

Foram resolvidos 5 problemas pelos programas usando os métodos com e sem rotação, para que suas soluções fossem analisadas. Na Tabela 1, temos a quantidade de polígonos alocada e o tempo gasto para resolver cada problema, para os casos com e sem rotação.

Tabela 1 – Comparação entre as soluções encontradas por cada método.

Problema	Método com Rotação		Método sem rotação	
	Polígonos Alocados	Tempo Gasto (s)	Polígonos Alocados	Tempo Gasto (s)
1	16	1.1894	33	0.2827
2	29	2.9727	48	0.2688
3	9	0.6787	21	0.1009

4	22	2.8581	24	0.1968
5	26	32.4728	28	0.1916

Surpreendentemente, o método com rotação empacotou menos polígonos do que sem rotação. Para os problemas em que a rotação poderia influenciar pouco, as soluções se aproximaram mais. Com respeito ao tempo gasto para resolver, já era esperado que o caso com rotação fosse demorar mais, visto que são resolvidos muitos problemas antes de se escolher a rotação de cada item alocado. As soluções do caso com rotação mostram que a estratégia utilizada para evitar sobreposição dos itens desperdiçou mais espaço que no caso sem rotação, e o critério de rotação dos itens, que foi minimizar a função objetivo, não é o ideal e pode ser melhorado.

Conclusões

Neste trabalho, foi estudado o empacotamento de polígonos convexos (com e sem rotação) dentro de contêineres poligonais convexos. Uma comparação entre as abordagens com e sem rotação sugere que o método para se resolver problemas permitindo rotações ainda pode ser melhorado. O método utilizado para evitar sobreposições desperdiçou mais espaço no caso em que se permite rotações. Além disso, o critério de rotação também poderia ser melhorado, pois o caso sem rotação, que equivale a alocar todos os itens com rotação de 0 graus, apresentou soluções superiores, o que foi um resultado oposto ao esperado e encontrado na literatura.

Agradecimentos

Quero agradecer à Fundação Araucária (3032/2019) pelo apoio financeiro, ao meu orientador por sempre estar pronto pra me ajudar e guiar na direção correta, e a minha família por sempre me incentivar.

Referências

BIRGIN, Ernesto G. et al. Method of sentinels for packing items within arbitrary convex regions. **Journal of the Operational Research Society**, v. 57, n. 6, p. 735-746, 2006.

CHEN, Ping et al. Two-dimensional packing for irregular shaped objects. In: **36th Annual Hawaii International Conference on System Sciences, 2003. Proceedings of the**. IEEE, 2003. p. 10 pp.

GALIEV, Sh I.; LISAFINA, M. S. Numerical optimization method for packing regular convex polygons. **Computational Mathematics and Mathematical Physics**, v. 56, n. 8, p. 1402-1413, 2016.

GOMES, A. Miguel; OLIVEIRA, José F. Solving irregular strip packing problems by hybridising simulated annealing and linear programming. **European Journal of Operational Research**, v. 171, n. 3, p. 811-829, 2006.

KOTHARI, Ravi; KLINKHACHORN, P. Packing of convex polygons in a rectangularly bounded, non-homogeneous space. In: **1989 The Twenty-First Southeastern Symposium on System Theory**. IEEE Computer Society, 1989. p. 200,201,202,203-200,201,202,203.