29º Encontro Anual de Iniciação Científica
9º Encontro Anual de Iniciação Científica Júnior
29ºEAIC 9ºEAIC JR
29 a 31 de outubro de 2020

Teoria de Grupos Aplicada ao Estudo dos Ornamentos do Plano

Marco Antônio Seratto (PIC/UEM), Patrícia Hernandes Baptistelli (Orientadora), e-mail: phbaptistelli@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas, PR.

Área e subárea do conhecimento: Matemática/Geometria e Topologia.

Palavras-chave: isometrias, teoria de grupos, ornamentos.

Resumo:

Neste projeto, estudamos os ornamentos no plano, que são formas geométricas que descrevem os padrões que se repetem no plano. Iniciamos definindo as isometrias no plano e classificando-as em cinco tipos: identidade, translação, rotação, reflexão ou reflexão com deslizamento. Como o conjunto de todas essas isometrias (munido da composição de funções) tem estrutura de grupo, utilizamos a teoria de grupos como ferramenta para classificar os ornamentos no plano em três tipos: rosetas, frisos e papéis de parede.

Introdução

O conceito de ornamento está associado à palavra ornato, que significa “enfeite, adorno”, estando presente em diversos locais, não só decorativos, mas na natureza em geral. Para entender o que são ornamentos, estudamos em um primeiro momento as possíveis transformações geométricas que uma figura plana pode sofrer, em especial, as transformações geométricas que preservem a distância entre dois pontos, as quais são chamadas de isometrias. Por meio das isometrias, podemos estabelecer os padrões geométricos que se repetem segundo uma ordem. Verificamos que existem cinco tipos de isometrias no plano: identidade, rotação, translação, reflexão em torno de uma reta e reflexão com deslizamento. Em um segundo momento, utilizamos a teoria de grupos como uma ferramenta essencial na classificação dos ornamentos. Embora existam infinitos tipos de ornamentos, os dividimos em três classes de acordo com os chamados grupos ornamentais. São eles: o grupo das rosetas (ou das rosáceas), o grupo dos frisos (ou das fitas) e o grupo dos papéis de parede. O principal objetivo deste projeto é compreender os ornamentos presentes em diversos locais decorativos e naturais, para que seja possível diferenciá-los, apreciá-los e, se desejar, criá-los. A principal referência para este projeto foi (GERÔNIMO e FRANCO, livro em preparação). Para maiores detalhes veja também (ARMSTRONG, 1988), (BACALHAU, 2012), (FERNANDES e MANOEL, 2011) e (Ledergerber-Ruoff, 1982).

Materiais e métodos

A metodologia utilizada consiste na pesquisa bibliográfica de referências, apresentação de seminários e discussões sobre o tema abordado. Os seminários foram apresentados com o auxílio de um quadro negro e giz.

Resultados e Discussão

O principal resultado obtido foi a classificação dos ornamentos no plano a partir de um conjunto de vetores relacionado com o grupo de translações do ornamento. Para tal classificação, apresentamos a seguir os principais conceitos e resultados referentes à teoria.

Definição 1. Uma **isometria** em R^2 é uma função I: R^2 —> R^2 tal que

$$|| I(P) - I(Q) || = || P – Q ||,$$

para quaisquer P e Q em R^2, onde || • || denota a norma euclidiana em R^2.

Claramente a identidade é uma isometria plana. Existem, além da identidade, 4 tipos distintos de isometrias planas: a rotação em torno de um ponto, a reflexão em torno de uma reta, a translação e a reflexão com deslizamento, que é a composição de uma reflexão com uma translação.

Definição 2. Chamamos de **figura geométrica plana**, ou simplesmente **figura**, um subconjunto F do plano. Chamamos de **simetrias** de F as isometrias do plano que satisfazem I(F) = F.

Definição 3. Dada uma figura F, o grupo Γ_F formado por todas as simetrias de F é chamado de **grupo ornamental de F**. Se existir pelo menos uma isometria diferente da identidade em Γ_F dizemos que F é uma figura **simétrica**. Caso contrário, dizemos que F é uma figura **assimétrica**.

Lembremos que um conjunto D é **discreto** se todos os seus pontos são isolados, ou seja, todo ponto de D possui uma vizinhança que não contém pontos do conjunto. Assim, definimos o que é um ornamento:

Definição 4. Um **ornamento** é uma figura simétrica F cujo grupo de ornamental Γ_F é discreto.

Como já mencionamos, faremos a classificação dos ornamentos por meio das translações de seu grupo ornamental. Mais precisamente, temos:

Definição 5. Seja F um ornamento e Γ_F seu grupo ornamental. O **grupo translacional de Γ_F** é o subgrupo $T_F = T \cap \Gamma_F$, onde T denota o conjunto de todas as translações de F.

É possível provar que T_F também é discreto. Além disso, podemos identificar T_F com o seguinte conjunto de vetores no plano:

$$A_F = \{v \in R^2;\ T_v \in T_F\}.$$

Como T_F é discreto, concluímos que A_F também é discreto. Para o próximo resultado, considere $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros.

Proposição 6. Todo subgrupo discreto D de R^2 tem uma das seguintes formas:

a) $D = \{(0,0)\}$.

b) Existe um vetor $u \in R^2$ não nulo tal que $D = \{mu;\ m \in \mathbb{Z}\}$.

c) Existem vetores $u, v \in R^2$ linearmente independentes tais que

$$D = \{mu + nv;\ m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Como A_F é um subgrupo discreto de R^2, ele apresenta uma dessas formas. Podemos, assim, classificar os ornamentos do plano em relação a A_F.

Teorema 7. Sejam F um ornamento e $A_F = \{v \in R^2;\ T_v \in T_F\}$, onde T_F é o grupo translacional de F. Então, F é do tipo:

(1) **Roseta**, quando $A_F = \{(0,0)\}$;
(2) **Friso ou Fita**, quando $A_F = \{mu;\ m \in \mathbb{Z} \text{ e } u \in R^2\}$;
(3) **Papel de Parede**, quando $A_F = \{mu + nv;\ m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } u, v \in R^2\}$.

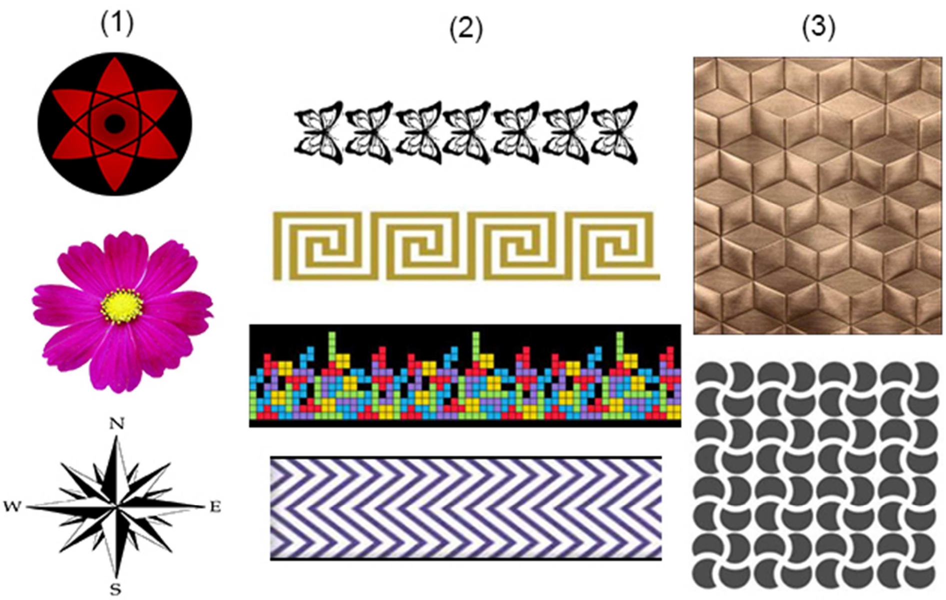

Figura 1 – Os três tipos de ornamentos do plano.

Conclusões

Podemos classificar os ornamentos no plano de acordo com as translações presentes no seu grupo translacional, as quais diferem na quantidade de direções. Mais precisamente, no caso em que a figura não possui translações não triviais no seu grupo ornamental, ela é uma roseta. Quando houver translações no seu grupo ornamental apenas em um sentido, a figura é um friso. Por fim, se houver translações em dois sentidos distintos, então a figura é um papel de parede. Para que esta classificação fosse possível, foi importante estudar os conceitos de isometrias e de teoria de grupos, os quais podem ser aplicados em diversas áreas do conhecimento. Dessa forma, o presente projeto nos permitiu o conhecimento necessário para criar padrões geométricos (ornamentos) que podem ser usados, por exemplo, em decorações de residências ou na sua arquitetura. Além disso, permitiu uma percepção mais apurada quanto aos ornamentos presentes no nosso cotidiano e na natureza.

Agradecimentos

Agradeço a minha orientadora por me permitir essa incrível experiência que foi fazer um PIC.

Referências Bibliográficas

[1] Armstrong, M. A. **Groups and Symmetry**, Spring-Verlag, New York, 1988.
[2] Bacalhau, F. M. **Isometrias do Plano e Simetria**. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, 2012.
[3] Fernandes, V. B. P., Manoel, M. **Teoria de Grupos Aplicada aos Padrões de Papéis de Parede**. Notas Didáticas do ICMC - USP, n.º 81, São Carlos, SP, 2011.
[4] Gerônimo, J.R., Franco, V. S. **Simetrias e Ornamentos no Plano** (livro em preparação).
[5] Ledergerber-Ruoff, E. B. **Isometrias e Ornamentos no Plano Euclidiano**, Editora Atual, 1982.