CÉLULAS ACOPLADAS COM SIMETRIA INTERNA

Henrique Tapparello Moresco (PIC/FNDE/UEM), Patrícia Hernandes Baptistelli (Orientadora), e-mail: phbaptistelli@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Matemática / Geometria e Topologia.

Palavras-chave: Simetrias Internas, Células Acopladas, Produto coroa.

Resumo

O produto coroa é um dos grupos de simetrias para um sistema de células acopladas com células idênticas e acoplamento idêntico. Ele é construído por meio dos grupos de simetrias globais e internas e, por esta razão, é natural que algumas de suas propriedades sejam relacionadas com esses grupos. Uma dessas propriedades é a irredutibilidade de subespaços sob a ação usual do produto coroa no espaço das variáveis.

Introdução

Diversos fenômenos da natureza são modelados por sistemas de equações diferenciais ordinárias. Alguns desses sistemas têm a dinâmica de sistemas células acopladas, como o exemplo estudado em GUCKENHEIMER (1988). Um sistema de células acopladas é um sistema de subsistemas (células) de equações diferenciais ordinárias. Estas células podem compartilhar variáveis, o que chamamos de acoplamento. Dois tipos de simetrias aparecem no estudo de sistemas de células acopladas: as simetrias globais e as internas. As simetrias globais estão relacionadas com o acoplamento entre as células, ou seja, como as células se comportam entre si. Já as simetrias internas se referem às simetrias de cada uma das células. As simetrias globais e internas se combinam para formar o grupo de simetrias total de um sistema de células acopladas, essencialmente de duas formas: com o produto direto ou o produto coroa. Nos dedicamos, prioritariamente, ao estudo do produto coroa no caso em que as células são idênticas com acoplamento idêntico. Dado um sistema de n células idênticas acopladas, sendo L o grupo de simetrias internas das células e G o grupo de simetrias globais do sistema, consideramos L como um subgrupo do grupo ortogonal das matrizes de ordem n com entradas reais e G como um subgrupo do grupo simétrico S_n. O produto coroa é o produto semidireto de L^n e G com relação a um homomorfismo $\varphi: G \rightarrow Aut(L^n)$ definido em DIONNE (1996), pag. 563. Este grupo induz uma ação em V^n, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita das variáveis de estado. Neste trabalho, estudamos a relação dos subespaços irredutíveis de V e de V^n com respeito às ações usuais de L e do produto coroa, respectivamente, explorando as simetrias do grupo G para obter uma caracterização dos subespaços irredutíveis de V^n.

Materiais e métodos

A pesquisa foi feita a partir de referências bibliográficas e apresentações orais. Das discussões orais surgiram os esclarecimentos necessários à fixação dos conceitos e das aplicações.

Resultados e Discussão

Definida a ação de um grupo de Lie Ω em um espaço vetorial V, passamos a estudar as propriedades dessa ação e alguns conceitos relacionados. Um subespaço W de V é dito invariante sob a ação de Ω se a órbita de todo elemento de W estiver contida em W. A ação de Ω em V é dita irredutível se os únicos subespaços invariantes de V são o subespaço nulo e o próprio espaço. Um subespaço de V é dito irredutível sob a ação de Ω se for invariante e a ação de Ω restrita a ele for irredutível. Com o teorema de redutibilidade completa apresentado em GOLUBITSKY (1988) fica clara a intenção de estudar esses subespaços, pois podemos escrever o espaço todo como uma soma direta de subespaços irredutíveis.

Aplicando o teorema para a ação do produto coroa em V^n, nos deparamos com o problema de identificação dos subespaços irredutíveis W segundo a ação do produto coroa. Para resolver esse problema, assumimos que o grupo G seja um subgrupo transitivo de S_n, isto é, para quaisquer naturais $1 < i, j < n$ existe um elemento g em G tal que $g(i) = j$. Outra hipótese que inserimos, essa bem mais natural, é supor que a ação de L^n em W não seja trivial. Com isso, podemos garantir que $W=U^n$, para algum subespaço L-irredutível U de V, classificando assim os subespaços irredutíveis de V^n sob a ação do produto coroa em função dos subespaços irredutíveis de V sob a ação do grupo L.

Conclusões

Com este trabalho, conseguimos estudar um tipo especial de dinâmica em um sistema de equações diferenciais, o sistema de células acopladas. Verificamos que as simetrias do produto coroa induzem uma ação natural em tal sistema e que os subespaços irredutíveis sob essa ação podem ser obtidos a partir dos subespaços irredutíveis sob a ação do grupo de simetrias internas.

Agradecimentos

À minha orientadora, ao FNDE e ao PET.

Referências

DIONNE, B., GOLUBITSKY, M., STEWART, I. Coupled cells with internal symmetry: I wreath product. **Nonlinearity**, v. 9, n. 2, p. 559-574, 1996.

GOLUBITSKY, M., STEWART, I., SCHAEFFER, D. G. **Singularities and Groups in Bifurcation Theory: Volume II.** Springer Science & Business Media, 2012.

GUCKENHEIMER, J., HOLMES, P. Structurally stable heteroclinic cycles. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 103, n. 1, p. 189-192, 1988.