UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

Stefane Miranda Novaes (PIC/UEM), Josiane Cristina de Oliveira Faria (Orientadora), e-mail: jcofaria@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Depart. De Matemática / Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra – Matemática – Equações Diferenciais Parciais

Palavras-chave: Funções Testes, Espaço das Distribuições, Solução Fraca.

Resumo:

Este projeto de pesquisa visa à sistematização do conhecimento matemático para um discente do Programa de Educação Tutorial (PET- Matemática/ UEM), com o intuito de introduzir conceitos básicos da Teoria das Distribuições, bem como algumas aplicações no contexto das equações diferenciais.

Introdução

No estudo das equações diferenciais, nosso objetivo é encontrar funções que satisfaçam determinadas identidades envolvendo algum tipo de derivada. Entretanto, existem funções que não são diferenciáveis em todo o seu domínio, e tal fato pode se tornar um grande inconveniente no desenvolvimento de alguns estudos.
Visando contornar tais inconvenientes nos deparamos com a Teoria das Distribuições, cujo elemento de estudo, a distribuição, é uma extensão do conceito de função usualmente conhecido. Através desta teoria conseguimos realizar feitos que com ferramentas usuais não seria possível como, por exemplo, derivar a "função" módulo.
Na teoria de equações diferenciais, o conceito de distribuição é útil para se definir o que chamamos “solução fraca” de uma equação diferencial.

Materiais e métodos

Nossa abordagem inicial se deu pelo estudo das Funções Testes seguindo a referência bibliográfica CORDARO. Prosseguimos com um estudo mais aprofundado do Espaço das Distribuições embasando-nos nas referências CORDARO, CAVALCANTI e SCWARTZ. Por fim, aplicamos o conceito de distribuição na prática abordando o que é uma solução fraca e uma solução clássica de uma equação diferencial, e explanando alguns exemplos utilizando a referência STRICHARTZ como base. A metodologia utilizada foi a de estudos individuais e com uma reunião semanal junto da orientadora para a discussão do que foi estudado.

Resultados e Discussão

O espaço das funções testes, denotado por $C_0^\infty(R^n)$, é constituído por funções $f: R^n \to R$ infinitamente diferenciáveis cujo conjuntos de pontos em que não se anula é limitado, i.é, existe $M > 0$ tal que $\|x\| < M$ para todo $x \in Y$, onde $Y = \{x \in R^n / f(x) \neq 0\}$. Uma sequência $\{\sigma_k\} \subset C_0^\infty(R^n)$ é convergente a zero se as seguintes propriedades ocorrerem:

- Localização: Existe $C > 0$ tal que $\sigma_k(x) = 0$ se $\|x\| > C$, para qualquer $k \in N$;
- Para uma derivada D de qualquer ordem em R^n tem-se $máx|D\sigma_k| \to 0$,

e quando isso acontece costumamos denotar $\sigma_k \rightharpoonup 0$.
Em suma, uma distribuição T (sobre R^n) é um funcional linear cujo domínio é $C_0^\infty(R^n)$ e satisfaz a propriedade de "continuidade sequencial":

se$\{\sigma_k\} \subset C_0^\infty(R^n)$ é tal que $\sigma_k \rightharpoonup 0$então $T(\sigma_k) \to 0$.

O espaço das distribuições será denotado por $D'(R^n)$ ou apenas D' quando o contexto deixa claro em que espaço estamos trabalhando. Esse espaço possui algumas operações, entre elas temos

- Soma: $(T_1 + T_2)(\sigma) = T_1(\sigma) + T_2(\sigma)$;
- Produto por escalar: $(\alpha T)(\sigma) = \alpha T(\sigma)$,

para todo $\sigma \in C_0^\infty$ com $T, T_1, T_2 \in D'$ e $\alpha \in R$.
É possível obter uma distribuição através de uma função que é integrável em todo o conjunto limitado de R^n. Tal identificação é feita da seguinte maneira

$$T_f(\sigma) = \int f(x)\sigma(x)dx.$$

A derivada no espaço das distribuições deve coincidir com a derivada usual das funções devido a identificação que citamos anteriormente. Assim, a definição de derivada em D' é a seguinte

$$\big(T(\sigma)\big)' = -T(\sigma').$$

De modo geral, para uma derivada D de ordem m teremos

$$D\big(T(\sigma)\big) = (-1)^m T\big(D(\sigma)\big).$$

Com relação às aplicações dos conceitos estudados, nos restringimos ao campo das equações diferenciais parciais. Uma equação diferencial parcial é uma equação definida da seguinte forma:

$$y = F(x_1, \cdots, x_n, \partial x_1, \cdots, \partial^k x_1 \dots x_k).$$

Dizemos que $y = f(x)$ é uma solução fraca desta equação se satisfaz esta identidade no sentido das distribuições.

Finalmente, salientamos que, por definição, uma solução clássica também é uma solução fraca, e do ponto de vista físico não se tem razão para preferir uma solução clássica a uma fraca.

Conclusões

O estudo realizado neste projeto é de grande valia para a área de equações diferenciais, com a obtenção de um espaço vetorial no qual seus elementos são infinitamente diferenciáveis. Assim, contornamos alguns inconvenientes que mesmo no caso real não poderiam ser driblados com ferramentas clássicas.

Agradecimentos

Agradecemos à Universidade Estadual de Maringá e ao projeto PET Matemática-UEM pelo apoio estrutural e financeiro para o desenvolvimento deste projeto de iniciação científica.

Referências

CORDARO, P. e KAWANO, A. **O Delta de Dirac: uma introdução à teoria das distribuições para a Engenharia**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

CAVALCANTI, M.M e CAVALCANTI, V.N.D. **Introdução à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Maringá: Eduem, 2009.

SCWARTZ, L. **La thèorie des distributions**. Paris: Hermann, 1966.

STRICHARTZ, R. S. A **Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms**. World Scientific, publishing Co, 2003.