

CODIMENSÃO DE IDEAIS E RESOLUÇÃO DE SISTEMAS POLINOMIAIS VIA BASES DE GRÖBNER

Welinton Anderson Rocha (PIC/UEM), Maria Elenice Rodrigues Hernandez (Orientador), e-mail: merhernandes@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá/Centro de Ciências Exatas e da Terra /Maringá, PR.

Matemática/Geometria Algébrica.

Palavras-chave: Codimensão de ideais, sistemas polinomiais, ordens monomiais.

Resumo:

Neste trabalho apresentamos métodos para o cálculo de codimensão de ideais do anel de polinômios em várias indeterminadas e exibimos um método que nos permite transformar um sistema polinomial em um sistema consideravelmente fácil de ser resolvido que possui as mesmas soluções do sistema inicial. Para tanto alguns conceitos e resultados preliminares foram necessários, como o de ordens monomiais, base de Gröbner de um ideal e o algoritmo da pseudo-divisão.

Introdução:

Os polinômios são estudados há séculos pelos matemáticos e, ao passo que a teoria se desenvolve, mais problemas vão surgindo. Um problema consideravelmente novo foi resolvido por Bruno Buchberger (1942) em sua tese de doutorado, em 1967, sob orientação de Wolfgang Gröbner (1899 - 1980). Esse problema consiste em um algoritmo para calcular um certo conjunto, chamado de base de Gröbner, para ideais em anéis de polinômios. A solução desse problema desencadeou diversas aplicações na matemática, como em problemas de coloração de mapas, completamento de Sudoku, cálculo de codimensão de ideais, resolução de sistemas polinomiais, entre outros. Para mais detalhes veja COX (2004) e HERNANDES (2011).

O estudo de invariantes em uma certa classe de objetos é fundamental para a compreensão de suas propriedades. Diversos invariantes são definidos como codimensão de ideais e, particularmente, no caso do anel de polinômios o conceito de base de Gröbner é uma ferramenta muito útil para calcular tais invariantes. A resolução de sistemas polinomiais é um problema muito presente na matemática. Para polinômios de grau um temos o que é conhecido como sistema linear, abordado em diversas disciplinas de graduação, para o qual conhecemos formas de encontrar as soluções, caso existam. Porém, se o sistema envolve polinômios de grau maior ou igual a dois, encontrar as soluções pode não ser uma tarefa fácil. Existem métodos numéricos e computacionais que aproximam as soluções, porém, aproximações podem não ser suficientes dependendo do objetivo do problema.

Neste trabalho abordamos os conceitos de ordem monomial e divisão de polinômios em várias indeterminadas, visando explorar o algoritmo de Buchberger para o cálculo de bases de Gröbner e aplicar no cálculo da codimensão de ideais e na resolução de sistemas polinomiais em várias indeterminadas.

Materiais e métodos:

A pesquisa foi realizada por meio do estudo das referências citadas, com apresentações orais do acadêmico realizadas semanalmente, em que os resultados eram discutidos para uma melhor absorção do conteúdo.

Resultados e Discussão:

O projeto se iniciou explorando definições e propriedades básicas do anel de polinômios em várias indeterminadas, em que um dos problemas abordados foi o da pertinência de um elemento do anel a um dado ideal deste. Algumas ferramentas auxiliares para resolver esse problema foram apresentadas, todavia o conceito de bases de Gröbner e o algoritmo de Buchberger nos fornecem uma maneira simples de calcular uma base de Gröbner para qualquer que seja o ideal e como consequência solucionar o problema da pertinência. Exploramos também algumas aplicações da teoria de bases de Gröbner, como o cálculo de codimensões de ideais e a resolução de sistemas polinomiais. Por fim, estudamos algumas relações em módulos sobre anéis de polinômios, as quais são chamadas de *syzygies*, onde estendemos os conceitos de polinômios, bases de Gröbner e o algoritmo de Buchberger.

Conclusões:

Com este projeto pudemos perceber a grande importância por trás do algoritmo desenvolvido por Bruno Buchberger, pois este rendeu diversas aplicações para a matemática. Pudemos também ver que estes conceitos foram estendidos para módulos, abrindo mais um campo de aplicações.

Agradecimentos:

A todos aqueles que me apoiam, a Deus e à minha orientadora pela paciência e dedicação comigo sempre.

Referências:

COX, D.A., LITTLE, J., O'SHEA, D., **Using Algebraic Geometry**, 2nd edition, Springer, New York, 2004.

HERNANDES, M.E., **Um Primeiro Contato com Bases de Gröbner**. 28º Colóquio Brasileiro de Matemática. Publicações Matemáticas, IMPA, 2011.