REPRESENTAÇÃO DE GRUPO: UM ESTUDO INICIAL

Júlio Atílio Dias de Mattos (PIC/UEM), Fernanda D. de Melo Hernández (Orientador), e-mail: ra103391@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Área e subárea do conhecimento: Matemática, Álgebra.

Palavras-chave: Grupos, Representação de grupos, Lema de Schur.

Resumo:

Neste projeto estamos interessados em estudar resultados acerca de representações de grupos finitos, para tal estudamos a representação linear de um grupo, representação por permutação de um grupo, representações irredutíveis e tabela de caracteres.
Aqui apresentaremos a representação linear de um grupo e o Lema de Schur, o qual é um resultado simples, mas extremamente útil na Teoria de Representações de Grupo.

Introdução

As primeiras definições de um grupo abstrato foram dadas no final do século XIX primeiramente por Cayley, alguns anos depois por Kronecker, Weber e Frobenius, antes já eram conhecidos os grupos de permutações e os grupos dos automorfismos de um espaço vetorial ou grupo linear, assim uma pergunta natural que surgiu foi: dado um grupo abstrato esse pode ser "realizado" como um grupo concreto (grupo das permutações ou grupo linear)?

Essa pergunta teve resposta positiva no século XX com a Teoria da Representação de Grupos. Inicialmente com Klein, e depois outros matemáticos como Molien, Frobenius, Schur, Burnside e Maschke desenvolveram o básico dessa teoria.

Nessa apresentação focaremos na representação linear de um grupo G, a qual é dada por um homomorfismo de G no grupo linear de um espaço vetorial.

Apresentaremos as definições de representação de grupos, sub-representações e representações irredutíveis em espaços vetoriais de dimensão finita. Em seguida veremos o que são homomorfismos de representações e definiremos representações equivalentes. Usando destas definições serão apresentados resultados que nos darão informações importantes sobre o núcleo e a imagem de um homomorfismo de representações. Com isso, e após analisarmos o núcleo e a imagem de um homomorfismo de representações irredutíveis, poderemos, por fim, demonstrar o Lema de Schur.

Materiais e métodos

Foram realizadas pesquisas bibliográficas, estudo e discussão teórica do tema abordado.

Resultados e Discussão

Em seguida enunciaremos os resultados que nos ajudaram a demonstrarmos o resultado final.

Definição: Sejam ρ_1: G → GL (V) e ρ_2: G → GL (W) duas representações do grupo G nos espaços vetoriais V e W, respectivamente. Dizemos que uma aplicação linear T: V →W é um homomorfismo de representações ρ1 e ρ2 se $T \circ \rho_{1g} = \rho_{2g} \circ T$, para todo g em G. Mais ainda, temos que se T: V → W for um homomorfismo invertível, então $\rho_{1g} = T^{-1} \circ \rho_{2g} \circ T$, para todo g em G, e assim ρ_1 e ρ_2 são ditas equivalentes.

Proposição: Sejam ρ_1 e ρ_2 duas representações do grupo G nos espaços vetoriais V e W, respectivamente, e seja T: V → W um homomorfismo, então:

1) Dado v em V, tal que v pertence ao Ker T, então $\rho_{1g}(v)$ também pertence ao Ker T, para todo g em G;

2) Dado w em W, tal que w pertence a Im T, então $\rho_{2g}(w)$ também pertence a Im T, para todo g em G.

Com estes resultados podemos concluir que se ρ_1 e ρ_2 são representações irredutíveis então T é bijetora. Assim podemos finalizar a apresentação demonstrando o lema a seguir:

Lema de Schur: Sejam ρ_1 e ρ_2 duas representações irredutíveis do grupo G nos espaços vetoriais V e W, respectivamente, e seja T: V → W um homomorfismo de representações. Então, se ρ_1 e ρ_2 não são equivalentes, T é nulo.

O Lema de Schur nos permite afirmar que se T: V → V é um homomorfismo que comuta com a representação irredutível ρ: G → GL (V), então existe um escalar λ, pertencente ao conjunto dos complexos, tal que T= λ.Id, onde Id denota a identidade em V, ou seja, temos que T pode ser escrito como um múltiplo da identidade.

Conclusões

O projeto de iniciação cientifica nos permitiu estudar em detalhes as representações de grupos sobre espaços vetoriais e caracteres de representação. Vimos, também, resultados que nos possibilitam determinar o número de p-subgrupos de Sylow de um grupo finito apenas usando da ordem deste grupo e verificar quando estes possuem subgrupos normais.

Agradecimentos

Agradeço a orientadora.

Referências

[1] A. Garcia, I. Lequain, **Elementos de Algebra**, 6th edição, Coleção Projeto Euclides, IMPA, 2018.

[2] W. Futton, J. Harris; **Representation Theory: a first course**, Graduate Text in Mathematics (129), Springer, 1991.

[3] J. B. Fraleigh; **Algebra abstracta: primer curso.** 3. ed. [S. l.]: Addison-Wesley Iberoamericana, 1988.

Esta deve ser a quarta e última página de seu resumo. **Não ultrapasse 4 páginas**. Caso contrário poderá ser solicitado que você o corrija. Fique atento!

ATENÇÃO:

O SITE DO EAIC **NÃO ACEITA** A EXTENSÃO DOCX., PORTANTO, SALVE SEU RESUMO **EM .DOC**