ESTUDO DE COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL NO PROBLEMA DE DISTRIBUIÇÃO DE PROFESSORES A DISCIPLINAS MODELADO COMO LEILÃO COMBINATORIAL

Arthur Rodrigues Batista (PIC/Uem), Daniel Kikuti (Orientador), e-mail: ra105422@uem.br.
Universidade Estadual de Maringá / Centro de Tecnologia/Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra, Ciência da Computação

Palavras-chave: alocação, complexidade computacional, leilão

Resumo:

O problema de alocação de professores a disciplinas consiste em distribuir todos os docentes para todas as disciplinas ofertadas por uma determinada instituição, de forma que nenhuma delas fique sem um professor. A alocação deve respeitar as regras da instituição, bem como tentar atender às preferências dos professores em relação às disciplinas. Considerando a modelagem do problema por meio de leilão combinatorial, este trabalho tem como objetivo investigar as limitações referentes à complexidade computacional envolvida nos processos de representação de preferências e de resolução do problema.

Introdução

A atribuição de professores a disciplinas é uma tarefa periódica em instituições de ensino. Este processo de alocação é bastante complexo e pode demandar muito tempo e esforço quando realizado manualmente.
Dentre as diversas propostas para automação deste processo, Silva (2017) propõe modelar o problema de alocação de disciplinas a professores como um Leilão Combinatorial. Nesta abordagem, os docentes (licitantes) poderiam manifestar preferências complementares sobre as disciplinas, ou seja, um conjunto de disciplinas pode produzir valor utilidade maior que o valor dado pela soma das utilidades individuais de cada disciplina.
Pouco se sabe a respeito da complexidade computacional da modelagem proposta em (SILVA, 2017). Tendo isto em vista, este trabalho buscou contribuir com aspectos teóricos relacionados a esta modelagem.

Revisão de Literatura

O Modelo de Programação Inteira a seguir foi usado para determinar o resultado do leilão combinatorial proposto por (SILVA, 2017), onde *S* representa um subconjunto do conjunto de turmas T; vp(S) é o valor que o professor *p* atribui ao subconjunto *S*; *Hmin(p)* e *Hmax(p)* são as cargas horárias semanais mínima e máxima que o professor p deve cumprir; *CH(S)* é a soma da carga horária das turmas contidas em *S*.

Maximizar:

$$\sum_{p \in P, S \subseteq T} x_{p,S} v_p(S) \tag{2.1}$$

Sujeito a:

$$\sum_{p \in P, S | t \in S} x_{p,S} = 1, \forall t \in T \tag{2.2}$$

$$\sum_{p, S \subseteq T} x_{p,S} \geq 1, \forall p \in P \tag{2.3}$$

$$\sum_{S \subseteq T} CH(S) x_{p,S} \geq H_{min}(p), \forall p \in P \tag{2.4}$$

$$\sum_{S \subseteq T} CH(S) x_{p,S} \leq H_{max}(p), \forall p \in P \tag{2.5}$$

$$x_{p,S} \in \{0, 1\} \tag{2.6}$$

A função objetivo descrita na Expressão 2.1 considera a maximização das preferências dos docentes sobre os conjuntos de itens de interesse.

Embora a formulação acima consiga gerar alocações, Silva (2017) definiu os seguintes pré-processamentos para evitar resultados indesejados (por exemplo, ter uma disciplina que não alocada devido à falta de interesse de todos os professores pela disciplina):

1. Propostas com Sobrecarga de Horário - O item com menor carga horária será retirado do subconjunto, desde que a carga horária mínima do professor seja respeitada. A retirada de itens se repete enquanto há sobrecarga de horário na proposta.
2. Concorrência de Turmas - Turmas que pertencem à mais de uma proposta serão retiradas destas e serão incluídas como novas propostas para o respectivo docente, sendo os valores destas novas propostas os valores individuais estimados para a turma.
3. Turmas que não obtiveram propostas - Neste caso, essas turmas não seriam alocadas a algum professor. Para evitar esta situação, todos os professores envolvidos no leilão estarão concorrendo pelas turmas que não obtiveram propostas.

Para contribuir com aspectos teóricos desta abordagem, buscamos determinar a classe de complexidade computacional do problema no caso geral e, posteriormente, analisamos os possíveis impactos dos pré-processamentos na complexidade do problema.

Resultados e Discussão

Uma constatação inicial foi que a versão de decisão do problema de otimização apresentado neste trabalho pertence à classe *NP*. Dado o conjunto S de lances feitos pelos licitantes (com os pré-processamentos já efetuados), existe uma alocação de professores a disciplinas cuja receita máxima obtida pelo leiloeiro seja maior ou igual a *W*? Um algoritmo verificador em tempo polinomial receberia como certificado uma alocação de professores a turmas, verificaria para cada professor se o conjunto de disciplinas alocadas pertence a *S* e se a soma da valoração dos conjuntos desta alocação é maior ou igual a *W*.

Para analisar a complexidade do problema de alocação de professores a turmas usando leilões combinatoriais, consideramos primeiramente uma versão geral (sem os pré-processamentos). A redução em tempo polinomial do problema *NP-Difícil* conhecido como k-Conjuntos Independentes (ou, *k-Independent Set*, em inglês) ao problema de leilão combinatorial descrita a seguir é conhecida na literatura. Nossa contribuição está em relacionar alguns destes conceitos com os pré-processamentos realizados no trabalho de (SILVA, 2017), que chamamos de versão restritiva.

Seja K um número inteiro positivo que representa a quantidade de conjuntos independentes. Dado um conjunto de *P* agentes, *M* itens e *V* licitantes, existe um conjunto disjunto de lances [[*p1*, *S1, vp(S1)*], [*p2, S2, vp(S2)*] ... [*pn, Sn, vp(Sn)*]] se, e somente se, $\sum_{p}^{n} Vp(S) \geq K$.

Prova. Seja G um grafo arbitrário e (V, E) o conjunto de vértices e arestas, respectivamente. Atribuímos um valor a cada arestas seguindo a ordem 1, 2, 3, …, m. Para cada vértice v $\in$ V , criamos um lance (S, vp(S)), em que S é o conjunto de números incidentes em v e vp(S) um peso atribuído a v no problema K - Independent Set. Encontrar lances mutuamente dissociados é equivalente a encontrar um conjunto independente, portanto, a soma dos valores de cada lance é equivalente à soma dos pesos correspondentes dos vértices do conjunto independente. Logo, se tivermos um conjunto independente de peso pelo menos K, também teremos lances mutuamente disjuntos cujos valores somam pelo menos K, por construção.

Como determinar os licitantes vencedores em um leilão combinatorial é equivalente a encontrar um conjunto independente máximo no grafo de lances, sugere-se diretamente que, encontrar um conjunto independente de tamanho pelo menos K implica na sua NP-Completude (Loker; Larson, 2010).

Para que a versão restritiva proposta por (Silva,2017) seja solucionável em tempo polinomial, ela precisaria apresentar algumas propriedades especiais. Em (Grotschel, Lovász, Schrijver; 1981), afirma-se que se o grafo for perfeito, então é possível resolver o problema K-Independent Set eficientemente. Podemos utilizar essa afirmação modelando a versão restritiva como grafo de lances. Se for comprovado que os pré-processamentos tornam o grafo perfeito, infere-se que a modelagem pertence à classe P. De maneira análoga, se forem grafos classificados como *Claw-free graph* e *Chordal graphs*, cuja ideia seja explorar a geometria dos objetos formado pelas ligações dos vértices a fim de criar algoritmos eficientes para solucionar o problema.

Por outro lado, se for demonstrado que a tradução do leilão combinatorial ao modelo baseado em grafos, dados os três pré-processamentos, não influenciam no caso geral, podemos concluir que a versão restritiva se mantém difícil. Um indicador para tal são os pré-processamentos 1 e 3. No item 1, as alterações no grafo são mínimas, já que são apenas incluídas novas proposta em detrimento da sobrecarga e retirada algumas turmas de propostas já existentes. No caso 3, acontece algo similar, ou seja, são apenas incluídos novos vértices ao grafo. O problema reside na segunda restrição, pois a eliminação de concorrência torna o grafo esparso, visto que, após aplicar essa restrição, existirão vários vértices isolados à medida que crescem o número de propostas disjuntas.

Conclusões

Neste trabalho explicamos por que no geral o problema de alocação usando leilões combinatoriais é NP-Difícil. Considerando a modelagem de (SILVA, 2017), elencamos algumas propriedades do grafo de lances que se demonstradas, permitem resolver o problema em tempo polinomial. Por outro lado, se com a eliminação de concorrência de turmas o grafo de lances gerado não possuir alguma propriedade que permita a resolução do problema k-Independent Set em tempo polinomial, então o problema permanece difícil.

Agradecimento

Agradeço ao grupo PET-Informática da Universidade Estadual de Maringá pela bolsa de pesquisa e ao meu orientador por ter me guiado durante toda pesquisa.

Referências

GRÖTSCHEL, M.; LOVÁSZ, L.; SCHRIJVER, A. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. Combinatorica, v. 1, p. 169–197, 01 1981.

SILVA, V. S. N. Investigação de modelos de programação matemática para distribuição de disciplinas a professores no ensino superior. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Informática) da Universidade Estadual de Maringá, 2017.

LOKER, D.; LARSON, K. Parameterizing the winner determination problem for combinatorial auctions. In Proceedings of the 9th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems. Richland, SC, 1483–1484.