GRAFOS COMUTANTES DE GRUPOS FINITOS

Thiago Luiz Bernin de Almeida (PIC/Uem), Geliane Beatriz Pipino Tavares (coautora), Profª Dra. Irene Naomi Nakaoka (Orientadora), e-mail: innakaoka@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas e da Terra/Maringá, PR.

Matemática/Álgebra

Palavras-chave: Grafos, grupos, grafos fortemente regulares, grafos comutantes

Resumo:

Em nosso projeto de iniciação científica estudamos grupos solúveis, grupos nilpotentes, isoclinismo de grupos, grafos fortemente regulares e grafo comutante de um grupo não abeliano finito. Com respeito a este último tipo de grafo, estudamos algumas de suas propriedades importantes e condições sobre o grupo para que o grafo comutante tenha certas propriedades particulares.

Introdução

Dado um grupo finito G, vamos denotar por $Z(G)$ o centro de G. Podemos associar um grafo a este grupo da seguinte forma: se X é um subconjunto não vazio de G, o grafo comutante de G sobre X, denotado por $C(G,X)$, é o grafo que tem X como seu conjunto de vértices e dois elementos distintos x e y de X são ligados por uma aresta sempre que eles comutam, isto é, se $xy=yx$.

Grafos comutantes foram inicialmente estudados por Brauer e Fowler em 1955 com $X=G-\{e\}$, onde e denota o elemento neutro do grupo G . Desde então, muitos trabalhos têm investigado $C(G,X)$ para diferentes escolhas de X. Por exemplo, Bates, Bundy, Hart e Rowley estudaram o grafo $C(G,X)$ quando X consiste de elementos de ordem 2 do grupo e diversos trabalhos têm considerado X como sendo o conjunto dos elementos não centrais de G. O grafo comutante $C(G,G-Z(G))$, o qual denotaremos por $\Gamma(G)$, é uma ferramenta importante para se estudar as relações de comutatividade entre os elementos não centrais de G. Entretanto, dado um elemento x de G, se $xZ(G)$ é a classe lateral à esquerda de $Z(G)$ determinada por x, não é difícil ver que quaisquer dois elementos de $xZ(G)$ comutam. Além disso, vértices x e y são adjacentes em $\Gamma(G)$ se, e somente se, g e h são adjacentes para todos $g \in xZ(G)$ e $h \in yZ(G)$. Assim, podemos estudar as relações de comutatividade em G apenas observando as relações de comutatividade que ocorrem entre elementos não centrais de uma transversal T de $Z(G)$ em G. Lembramos que uma transversal de $Z(G)$ em G é um conjunto formado tomando-se um representante de cada classe lateral de $Z(G)$ em G. Desta forma, o estudo de grafos $C(G,X)$, onde $X= T-Z(G)$, possui um grande interesse. Chamamos tal grafo de grafo comutante sobre uma transversal do centro e o denotamos por $T(G)$. Observamos que não vamos especificar a transversal escolhida nessa notação pois é possível mostrar que grafos comutantes obtidos a partir de duas transversais do centro resultam em grafos isomorfos.

Nosso objetivo principal foi estudar os grafos comutantes $\Gamma(G)$ e $T(G)$ conforme os trabalhos [1] e [2]. Vimos algumas de suas propriedades importantes, bem como algumas condições sobre um grupo não abeliano finito para que seu grafo comutante seja fortemente regular conexo ou uma união disjunta de grafos completos de mesmo tamanho.

Materiais e métodos

Para o estudo foram realizadas leituras de capítulos de livros e artigos sobre o assunto e apresentados seminários semanais dos resultados obtidos.

Resultados e Discussão

A primeira parte do projeto consistiu no estudo de alguns tópicos da Teoria dos Grupos e da Teoria dos Grafos. Como iremos apresentar apenas a segunda parte do projeto, vamos dar uma ênfase maior nos resultados obtidos a partir dali. Começamos definindo grafo fortemente regular.

Definição: Um grafo é *fortemente regular* com parâmetros (n,k,λ,μ), em que $1 \leq k \leq n-1$, se as seguintes condições estão satisfeitas:

- todo vértice do grafo tem grau k;
- se u e v são vértices adjacentes do grafo, o número de vizinhos comuns de u e v é λ;
- se u e v são vértices não adjacentes do grafo, o número de vizinhos comuns de u e v é μ.

O teorema mais relevante que vimos em nosso estudo sobre o grafo comutante $\Gamma(G)$ foi o que fornece uma condição necessária e suficiente para o grafo $\Gamma(G)$ *ser fortemente regular.*

Teorema: (veja [1] e [2]) Seja G um grupo não abeliano finito. O grafo comutante $\Gamma(G)$ de G é fortemente regular se, e somente se, $\Gamma(G)$□ mK_s, onde $ms=|G - Z(G)|$ e $s=([C_G(x)] : Z(G)]-1)|Z(G)|$ para todo x □ $G-Z(G)$.

Com respeito aos grafos comutantes $T(G)$, destacamos abaixo alguns resultados importantes.

Proposição: [2, Lema 3.4] Dado um primo ímpar p, seja G um p-grupo finito não abeliano. Se o grafo $T(G)$ é fortemente regular, então é desconexo.

Segue dessa proposição que se G é um p-grupo não abeliano finito tal que $T(G)$ é fortemente regular conexo, então $p=2$. O resultado abaixo garante a existência de uma família infinita de 2-grupos finitos cujos grafos comutantes sobre uma transversal do centro são fortemente regulares conexos. Antes de enunciá-lo, observamos que um p-grupo não abeliano finito G é *extraespecial* se $|Z(G)|=p$ e o grupo quociente $G/Z(G)$ é um p-grupo abeliano elementar.

Proposição: ([2, Proposição 3.2]) Se G é um 2-grupo extraespecial de ordem 2^{2n+1}, com $n\geq 2$, então $T(G)$ é um grafo fortemente regular conexo com parâmetros

$$(2^{2n} - 1, 2^{2n-1} - 2, 2^{2n-2} - 3, 2^{2n-2} - 1).$$

Vamos denotar por K_n o grafo completo sobre n vértices e, para x em G, o subgrupo centralizador de x em G será indicado por $C_G(x)$. Em [2] é estabelecida uma condição necessária e suficiente para que o grafo $T(G)$ seja uma união disjunta de grafos completos de mesmo tamanho.

Teorema: ([2, Proposição 3.2]) Seja G um grupo não abeliano finito e sejam m *e* n inteiros positivos. O grafo $T(G)$ é uma união disjunta de m cópias de K_n se, e somente se, $mn = [G : Z(G)] - 1$ e, para qualquer x □ $G-Z(G)$, o subgrupo $C_G(x)$ é abeliano e $[C_G(x) : Z(G)] = n+1$.

É bem conhecido que um grafo é fortemente regular desconexo se, e somente se, é uma união disjunta de m cópias de $K_{n,}$, para alguns inteiros m e n, com m, n ≥ 2. Assim, como uma consequência do último teorema, tem-se o seguinte:

Corolário: Seja G um grupo não abeliano finito. O grafo $T(G)$ é fortemente regular desconexo se, e somente se, os subgrupos centralizadores dos elementos não centrais de *G* são todos abelianos e existe um inteiro *r*, com *r* ≥ 3, tal que $[C_G(x) : Z(G)] = r$, para todo $x \in G - Z(G)$.

Isso finaliza e mostra um pouco do que foi feito durante este projeto.

Conclusões

O propósito deste projeto de Iniciação Científica foi o de estudar uma teoria nova dentro da Teoria dos Grafos associada com a Teoria dos Grupos. Isto nos possibilitou o estudo de alguns tópicos de Álgebra Abstrata e de Matemática Discreta que não são abordados no curso de Matemática e nos possibilitou também o desenvolvimento da linguagem escrita e da habilidade oral com a preparação e apresentação dos seminários.

Agradecimentos

Agradecemos à Universidade Estadual de Maringá pela oportunidade de conhecer e trabalhar em uma pesquisa científica e à orientadora deste projeto, pela atenção e paciência.

Referências

[1] Akbari, M., Moghaddamfar, A. R. The Existence or Nonexistence of Non-Commuting Graphs with Particular Properties. **Journal of Algebra and its Applications**, v. 13, n.01, 2014.

[2] Pezzott, J. C. M., Nakaoka I. N. On groups whose commuting graph on transversal is strongly regular. **Discrete Mathematics**, v.342, 111626, 2019.

[3] Cameron P. J., Van Lint J. H. **Designs, Graphs, Codes and Their Links**. Cambridge Unversity Press, 1991.

[4] Chartrand G., Zhang P. **A First Course in Graph Theory**, Dover Publications, 2012.

[5] Robinson, D. J. S. **A Couse in the theory of groups**, 2ª edição, Springer-Verlag, New York, 1996.