

ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E SUAS APLICAÇÕES

Igor do Valle Souza (PIBIC/CNPq/FA/Uem), Juan Amadeo Soriano Palomino
(Orientador). E-mail: jaspalomino@uem.br

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra /Matemática

Palavras-chave: equação diferencial ordinária, métodos de solução, aplicações

Resumo:

As Equações Diferenciais se tratam de relações envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem, ou seja, derivadas (BOYCE e DIPRIMA, 2006). Dessa forma, o objetivo deste projeto é mostrar as principais teorias, conceitos, e aplicações relacionadas às Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs).

Introdução

As Equações Diferenciais são muito presentes não apenas no mundo matemático (por exemplo, em Topologia e Geometria Diferenciais e no Cálculo de Variações), mas também regem muitas leis gerais da Física, Biologia e Economia, por exemplo (SOTOMAYOR, 1979). Por consequência, diversas áreas afins possuem fenômenos regidos por essas equações.

Ao se trabalhar com uma função $y = f(x)$, o cálculo de sua derivada pode ser realizado através de métodos e regras apropriadas. No entanto, quando se trata de uma equação envolvendo derivadas, encontrar de alguma forma a função $y = f(x)$ que satisfaça o problema pode não ser tão simples, e é o que se chama de resolver equações diferenciais (ESPINOZA, 2009). Dentre os inúmeros métodos de resolução de Equações Diferenciais Ordinárias, investigou-se os principais em ordem 1, 2 e superior, além das Transformadas de Laplace em EDOs e dos Sistemas Lineares de EDOs de ordem 1, a fim de possibilitar a resolução de problemas e de facilitar a compreensão das aplicações, que também foram estudadas.

Materiais e métodos

Os materiais utilizados durante o estudo foram materiais bibliográficos relacionados com o trabalho em questão. A metodologia utilizada foi a realização de seminários semanais dos tópicos deste trabalho sob a supervisão do professor orientador.

Resultados e Discussão

Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Quando se trata de Equações Diferenciais de primeira ordem, existem métodos distintos para a resolução dos problemas, os quais irão variar de acordo com o tipo de equação. Entretanto, um dos métodos principais, é o das equações separáveis, que inclusive pode servir de base para outros métodos, como o método do fator integrante, por exemplo.

Definição: Considerando uma equação na forma $M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$, ela é dita separável se M depende apenas de x e N depende apenas de y , uma vez que quando escrita na forma diferencial $M(x)dx + N(y)dy = 0$, é possível separar as parcelas envolvendo cada variável, através do sinal de igualdade.

Observação: Uma equação separável pode ser resolvida através da integração das funções M e N .

Equações Diferenciais Ordinárias de Ordem Superior

Assim como nas Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem, nas de ordem superior existem diferentes maneiras de resolver os problemas, dependendo da forma da equação, que pode ser homogênea ou não-homogênea. No caso mais comum, quando os coeficientes são todos constantes, os principais métodos estudados para as equações não-homogêneas, tais como Variação dos Parâmetros e Coeficientes Indeterminados, dependem da solução homogênea para que se chegue à solução geral.

Dessa forma, é possível perceber a importância da solução homogênea na resolução de EDOs de ordem superior. Contudo, considerando o caso onde os coeficientes são constantes, a equação homogênea será da forma

$$\frac{a_n d^n y}{dx^n} + \frac{a_{n-1} d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{a_1 dy}{dx} + a_0 y = 0, \quad (3)$$

sendo $a_0, a_1, \dots, a_n$ valores constantes.

Para resolver esses problemas, primeiro é necessário considerar o polinômio característico da forma

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0, \quad (4)$$

do qual pode-se obter as seguintes raízes $r_1, r_2, \dots, r_n$. Essas raízes podem aparecer de três diferentes maneiras:

Caso 1: Quando as raízes são reais e distintas, a solução geral é

$$y_g = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}. \quad (5)$$

Caso 2: Quando as raízes da equação são de multiplicidade, considerando $r_1 = r_2 = \dots = r_k = r$, onde r é a raiz de multiplicidade k e $r_{k+1}, \dots, r_n$ são as demais raízes, a solução geral da equação é

$$y_g = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} + \dots + c_k x^{k-1} e^{rx} + c_{k+1} e^{r_{k+1} x} + \dots + c_n e^{r_n x}. \quad (6)$$

Caso 3: Quando existem raízes complexas, tais como: $r_1 = \alpha_1 + i\beta_1, r_2 = \alpha_1 - i\beta_1, r_3 = \alpha_2 + i\beta_2, r_4 = \alpha_2 - i\beta_2$, e as demais raízes supõe-se que sejam reais e distintas. A solução geral desse problema, é dada por

$$y_g = c_1 e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + c_2 e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x + c_3 e^{\alpha_2 x} \cos \beta_2 x + c_4 e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x + c_5 e^{r_5 x} + \dots + c_n e^{r_n x} \quad (7)$$

Aplicações

Existem inúmeras aplicações para as EDOs, principalmente quando se trata de ordem superior. Porém, dentre as estudadas, as principais foram na física, em sistemas amortecidos, e na engenharia elétrica, nos circuitos RLC. Portanto, a fim de exemplificar uma dessas aplicações, considere um sistema massa-mola disposto na horizontal, onde uma das extremidades da mola está presa na superfície vertical e a outra, presa a um bloco de massa m . Considerando que esse sistema esteja em movimento harmônico amortecido, a força resultante F_r será dada pela soma da força elástica F_{el} com a força de resistência do ar F_{res} , a qual terá sinal negativo por ser contrária ao movimento.

$$F_r = ma = -kx - cv, \quad (8)$$

onde k é a constante elástica da mola, x representa sua deformação, c é uma constante de proporcionalidade relativa a força de resistência do ar, a representa a aceleração e v a velocidade.

Ajustando então a equação, obtém-se que

$$mx'' = -kx - cx' \leftrightarrow \quad (9)$$

$$mx'' + cx' + kx = 0. \quad (10)$$

É possível perceber, que a equação em questão se trata de uma EDO homogênea, de coeficientes constantes, podendo ser resolvida de acordo com o método do polinômio característico.

Outra aplicação importante que utiliza conceitos de EDO homogênea, é em um circuito elétrico RLC (que envolve elementos tais como resistor, indutor e capacitor), cuja modelagem possui como base, EDOs de primeira ordem do circuito RL, descrita por

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t) \quad (11)$$

e do circuito RC, representada por

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t). \quad (12)$$

Ambas as equações (11) e (12) são EDOs de primeira ordem, as quais possuem uma relação matemática em circuitos RLC, de acordo com conceitos físicos da Lei de Kirchhoff das Tensões de um circuito. Essa relação, indica que

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = E(t), \quad (13)$$

sendo L a indutância do indutor, R a resistência do resistor, i a corrente do circuito, q a carga do capacitor, C sua capacitância e $E(t)$ a força eletromotriz do circuito. A equação (13), pode ser reescrita utilizando conceitos físicos, passando para a forma

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t), \quad (14)$$

podendo ser representada também por

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C} q = E(t). \quad (15)$$

A equação (15), pelo fato das variáveis L , R e $1/C$ serem constantes, se trata de uma EDO homogênea de coeficientes constantes, permitindo que se encontre sua solução geral através do método do polinômio característico.

Conclusões

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) possuem múltiplas aplicações, não apenas para as áreas tradicionais, tais como a Física ou a Matemática. Essas equações se tratam de ferramentas matemáticas importantíssimas na investigação e na resolução de problemas envolvendo áreas como Medicina, Biologia ou mesmo Economia, por exemplo. Ainda, é possível perceber que há muitas peculiaridades nas maneiras de resolver cada tipo de EDO, pois não existe um método geral para resolver vários desses problemas, mas sim vários métodos distintos para diferentes casos e aplicações. Isso mostra não apenas o fato de que não se trata de um tema simples, mas também mostra o quão interessante essas ferramentas podem ser.

Agradecimentos

Agradeço a CNPq pelo apoio financeiro e a UEM pela infraestrutura.

Ao Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino, coordenador do projeto, pela oportunidade, apoio e orientação.

À Prof^a. Ma. Lígia Bittencourt Ferraz de Camargo pela confiança e orientação.

Referências

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R.C., **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**, LTC, 2006.

ESPINOZA RAMOS, E., **Análisis Matemático IV**: para Estudantes de Ciencias e Ingenierías. 2. ed. Lima, Perú: 2008.

SOTOMAYOR, J., **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.