INTRODUÇÃO ÀS ÁLGEBRAS DE LIE

Nathan Henryque Ferreira Barros (PICME-CNPq/Uem), Ryuichi Fukuoka (Orientador), e-mail: ra104321@uem.br

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Matemática/ Álgebra

Palavras-chave: Álgebras de Lie, representações, decomposição de Jordan

Resumo:

Neste trabalho foram estudados as Álgebras de Lie e suas representações, principalmente representações matriciais das álgebras de Lie solúveis e nilpotentes. Foram vistos vários exemplos ao longo do trabalho.

Introdução

Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto vetorial que denominamos colchetes

$$[\cdot,\cdot]:\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

com as seguintes propriedades:

· $[\cdot,\cdot]$ é bilinear;

· $[\cdot,\cdot]$ é anti-simétrico, isto é, $[X,X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$;

· Satisfaz a identidade de Jacobi

$$\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big] = 0,$$

que pode ser escrito como:

$$\big[[X,Y],Z\big] = \big[X,[Y,Z]\big] + \big[[X,Z],Y\big].$$

Desde que o corpo não seja de característica 2, pela anti-simetria temos $[X,Y] = -[Y,X]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Vamos trabalhar com espaços vetoriais com dimensão finita e o corpo □ sendo algebricamente fechado.

Um exemplo essencial de álgebra de Lie é o $\mathfrak{gl}$(n,□) que é o espaço das matrizes nxn com entradas em □. Este espaço pode ser identificado com o espaço dos operadores lineares de um espaço vetorial V sobre □ de dimensão n. O colchete em $\mathfrak{gl}$(n,□) é definido por $[X,Y] = XY - YX$.

A introdução às álgebras de Lie vem como uma ferramenta para os estudos de grupos de Lie e de variedades diferenciáveis. Seu nome é uma referência ao matemático Sophus Lie.

Materiais e métodos

Fizemos encontros semanais de uma hora e quarenta minutos, onde discutimos os assuntos estudados na semana. A referência principal foi o livro de SAN MARTIN.

Resultados e Discussão

Primeiramente vamos introduzir conceitos fundamentais que formam a linguagem básica necessária para a teoria de álgebras de Lie.
Dado uma transformação linear ψ entre duas álgebras de Lie, diremos que ela é um homomorfismo se ela preserva o colchetes, ou seja, $\psi[X,Y] = [\psi X, \psi Y]$. Se ψ for um homomorfismo inversível então dizemos que é um isomorfismo.
Descrever álgebras de Lie como álgebras de transformações lineares é uma forma comum para facilitar seu entendimento. Dessa forma, considere V um espaço vetorial e $\mathfrak{gl}$(V) a álgebra de Lie de suas transformações lineares. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma representação de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo

$$\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V).$$

Usando o colchetes podemos definir uma representação de forma natural conhecida como representação adjunta. Dado X∈$\mathfrak{g}$ considere a transformação ad(X):$\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ onde ad(X)(Y)=[X,Y]. A aplicação ad:$\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é uma representação conhecida como representação adjunta.
Outro conceito importante é o de ideais. Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{h}$ é um ideal se para todo Y∈$\mathfrak{h}$ e X∈$\mathfrak{g}$ ocorre que [X,Y]∈$\mathfrak{h}$. Em outras palavras temos [$\mathfrak{g}$,$\mathfrak{h}$]⊂$\mathfrak{h}$. De forma semelhante, em espaços vetoriais, podemos construir uma álgebra quociente $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ definindo $[\underline{X},\underline{Y}] = \underline{[X,Y]}$, onde $\underline{X}$ denota a classe $X+\mathfrak{h}$.
Alguns ideais importantes são construídos indutivamente pela série derivada que é dado por $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ e $\mathfrak{g}^{(n)} = \left[\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}\right]$, e a série central descendente que é dado por $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}^{(1)}$ e $\mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n-1}]$. Dessa forma podemos definir a álgebra $\mathfrak{g}$ como solúvel ou nilpotente se existir um n_0 tal que $\mathfrak{g}^{(n_0)} = \{0\}$ ou $\mathfrak{g}^{n_0} = \{0\}$ respectivamente.

Com enfoque nas álgebras nilpotentes, uma representação ρ é chamado de nil-representação se existe um k tal que $\rho(X)^k = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Assim a representação adjunta de uma álgebra nilpotente é uma nil-representação. Considerando que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ e $V \neq 0$, suponha que todo $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente. Então existe um $v \in V$ não nulo tal que $Xv = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.
Considerando V_1 o subespaço vetorial gerado por todos os v onde $Xv = 0$ podemos encontrar $v' \in \frac{V}{V_1}$ tal que $Xv' \in V_1$, dessa forma podemos encontrar $\{V_0, \ldots, V_n\}$tal que

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V,$$

onde $V_i = \{v \in V : Xv \in V_{i-1}$, para todo $X \in \mathfrak{g}\}$. Definindo uma nova base em relação a ordem dos V_i chega-se a uma matriz X triangular superior com zeros na diagonal para todo X.

Dessa forma, dado $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e suponha que ad é uma nil-representação. Então todo $\mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é nilpotente. De forma ao conjunto $\{V_0, \ldots, V_n\}$, existe uma série central ascendente

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n \subset \mathfrak{g}.$$

Com todos esses resultados o teorema de Engel é direto.

Teorema de Engel: Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e suponha que para todo $X \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(X)$ é nilpotente. Então, $\mathfrak{g}$ é nilpotente.

Com a fórmula de comutação em álgebras associativas, podemos decompor V em relação a um $\rho(X) \in \mathfrak{gl}(V)$ como uma soma direta de V_i em relação ao autoespaço generalizado. Como a decomposição são auto-espaços simultâneos para todo $X \in \mathfrak{g}$, então existem funcionais lineares $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ tal que V pode ser decomposto por V_{λ_i} definido como

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, \big(\rho(X) - \lambda_i(X)\big)^n v = 0\}.$$

Vamos denominar esses funcionais λ_i como pesos desde que $V_{\lambda_i} \neq 0$.

Se ρ é uma representação e λ é um peso então $\underline{\rho} = \rho - \lambda$ é uma representação. Denote $\rho_i = \frac{\rho}{V_{\lambda_i}}$. Com a decomposição anterior, se $\mathfrak{g}$ for uma álgebra nilpotente, então cada $\underline{\rho_i} = \rho_i - \lambda_i$, pode ser escrita como uma matriz triangular superior com zeros na diagonal. Logo

$$\rho(X) = \begin{bmatrix} \rho_1(X) & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_s(X) \end{bmatrix}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra solúvel e ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V. Temos que $\rho(\mathfrak{g})$ é uma álgebra solúvel. Então, sem perda de generalidade, vamos considerar $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$. Em contraste com as álgebras nilpotentes, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra solúvel então existe um $v \in V$ não nulo e um funcional linear λ tal que $Xv = \lambda(X)v$, para todo $X \in \mathfrak{g}$. Em outras palavras, um autovetor comum a todo X com autovalor $\lambda(X)$. A partir desse resultado, pode-se mostrar através de quocientes sucessivos uma base que triangulariza $\mathfrak{g}$.

Teorema de Lie: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma álgebra solúvel. Então existe uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V e funcionais lineares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tal que, a matriz X se escreve como

$$X = \begin{bmatrix} \lambda_1(X) & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(X) \end{bmatrix}.$$

Conclusões

Os teoremas de Engel e de Lie descrevem álgebras nilpotentes e solúveis como sendo esencialmente álgebras de matrizes triangulares superiores. O teorema de Engel é uma peça fundamental para o estudo de subálgebras de Cartan, utilizada para a classificação de álgebras semi-simples.
Nosso trabalho reside no entendimento do conteúdo de forma detalhada, auxiliando no estudo de futuros resultados e uma compreensão fiel do assunto.

Agradecimentos

Agradeço ao apoio financeiro do CNPq e a paciência do meu orientador Dr. Ryuichi Fukuoka. Agradeço pela oportunidade de aprender ainda mais.

Referências

SAN MARTIN, L.A.B. **Álgebras de Lie**. São Paulo: Editora da Unicamp, 1999.

COELHO, F.U e Lourenço, M.L. **Um curso de álgebra linear**. São Paulo: Edusp, 2001.