CURVAS NA VARIEDADE GRASSMANNIANA $Gr_2(3, \mathbb{R})$.

Gustavo Alonso Santana (PIBIC/CNPq-FA-UEM),
Josiney Alves de Souza (Orientador),
E-mail: gustavoalonsosantana@gmail.com.

Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Maringá, PR.

Área: Ciências Exatas e da Terra;
Subárea: Matemática;
Palavras-chave: Grupos de Matrizes, Curvas Diferenciáveis, Variedade Grassmanniana.

Resumo:

O objetivo do projeto realizado foi o estudo da torção de curvas espaciais por meio da geometria da variedade Grassmanniana. Se tomamos curvas espaciais parametrizadas regulares que possuem derivada primeira regular, então podemos associar a cada ponto da curva uma tripla de vetores chamada triedro de Frenet.

Através dos vetores do triedro define-se três planos, um dos quais é chamado de plano osculador; a medida da variação deste plano conforme o parâmetro varia é chamada torção, ela nos indica o quanto localmente (nas proximidades do ponto) a curva deixa de ser plana.

O que queríamos era estudar a torção de uma curva espacial associando seus planos osculadores a uma curva na variedade Grassmanniana $Gr_2(3, \mathbb{R})$, que consiste em todos os planos bidimensionais do espaço tridimensional que passam pela origem.

Em outras palavras, tentamos entender as características da curva no espaço a partir das informações obtidas da curva induzida na variedade.

Introdução

Antes de podermos trabalhar na variedade Grassmanniana, precisamos construí-la, e para isto foram necessários uma gama de conhecimentos prévios.

Começamos por estudar grupos de Lie de matrizes, mais especificamente, com grupos lineares gerais e seus subgrupos. Tratamos de conceitos como: espaço tangente de um grupo de matrizes, dimensões destes grupos.

Depois disto, focamos nos grupos ortogonais, que são usados na construção da variedade Grassmanniana. Estudamos as funções exponencial de matrizes reais e logaritmos de matrizes reais, as quais nos permitem transitar do espaço tangente para o grupo de matrizes e voltar.

Estudou-se, brevemente, curvas espaciais parametrizadas e suas principais características: curvatura e torção. Isto foi feito para parâmetros gerais e também para a restrição ao comprimento de arco como parâmetro. Obteve-se fórmulas e apresentou-se exemplos que posteriormente analisaremos na variedade Grassmanniana.

Daí, seguimos com a construção da variedade em si, para isto usamos os conceitos: quociente de grupos, ações de grupos, órbitas e estabilizadores. Além dos já citados grupos ortogonais. A forma com a qual a construção foi feita já garantiu à variedade não só uma estrutura algébrica, mas também estruturas topológica e diferenciável induzidas.

No presente momento em que redige-se este resumo expandido, estamos usando a variedade construída para investigar exemplos de curvas conforme temos como objetivo.

Materiais e métodos

Os materiais usados foram livros. Em cada momento da pesquisa bibliográfica e do estudo do conteúdo lido, fora fixado algum livro, enquanto outros foram usados como apoio; em geral, a fim de vermos o mesmo assunto de uma perspectiva diferente, para assim tentarmos ter um melhor entendimento do que discutíamos.

Os resultados obtidos pelos estudos foram apresentados semanalmente em encontros do orientando com o orientador. Nestes também discutimos dúvidas e ideias novas que surgem, nem todas são posteriormente investigadas, pois isto acarretaria um desvio do foco do trabalho. Mas esta delimitação dos conteúdos que tratamos, bem como a visão do quão amplo eles podem ser, implica uma melhor compreensão, mesmo que nem sempre profunda.

Resultados e Discussão

No presente momento em que redijo este resumo expandido, não temos um resultado concreto, como um teorema provado, ou uma grande revelação geométrica. Contudo, a construção da variedade Grassmannina foi obtida e uma conexão entre a curva no espaço tridimensional e a curva induzida na variedade foi feita, e o comportamento desta aparenta-se promissor.

Conclusões

Este projeto iniciou-se enquanto eu cursava o terceiro ano de licenciatura em matemática. Neste temos um contato maior com as áreas de álgebra, e de análise matemática, além das componentes curriculares pedagógicas e as de física. A geometria tratada neste ano do curso se resume a euclidiana na disciplina de construções geométricas.

Dado o cenário, o projeto, que é em um conteúdo de geometria, que sim tem ligações com a euclidiana, mas também tende a geometria moderna (um amplo campo de pesquisa em matemática atualmente); mostrou-se como uma oportunidade única de lidar com um lado da matemática que não é tratado no curso.

Os avanços no estudo dos conteúdos previamente propostos, e as ideias e dúvidas que iam e viam – umas tocadas só tangencialmente, seja pela limitação de tempo ou por minha limitação de conhecimento de diferentes campos avançados da matemática, outras tratadas com esmero – possibilitaram-me alcançar uma visão mais ampla do vasto mundo da matemática, mas como todo panorama, enxerga-se bem o que está sob os pés, mas de forma desbotada a linda paisagem que nos envolve. Há muitos caminhos a serem trilhados, muitas belezas a serem vistas, mas também, muitas pedras a serem pisadas ou removidas.

Agradecimentos

Agradeço, inicialmente, ao CNPq pelo fomento financeiro.

Agradeço à minha família por me apoiar em diferentes aspectos, algo imprescindível para que eu despendesse boa parte do meu tempo em meus estudos, os quais espero que tragam um retorno não só a mim enquanto profissional, mas também enquanto indivíduo; e a sociedade a qual integro.

Agradeço agora, especialmente, ao meu orientador que sempre respeitou o meu ritmo de aprendizagem, e que com sua postura acolhedora me ensina não só matemática.

Referências

- CARMO, Manfredo P. do. **Differential Geometry of Curves & Surfaces.** 2. ed. New York: Dover Publications, 2016.

- CURTIS, Morton L. **Matrix Groups.** 2. ed. New York: Springer, 1984.

- SAN MARTIN, Luiz A. B. **Grupos de Lie.** Campinas: Editora da Unicamp, 2016.

- STILLWELL, John. **Naive Lie Theory.** New York: Springer, 2008.