29º Encontro Anual de Iniciação Científica
9º Encontro Anual de Iniciação Científica Júnior
29ºEAIC 9ºEAIC JR
29 a 31 de outubro de 2020

INTRODUÇÃO A TEORIA DOS SISTEMAS BILINEARES

Felipe Gabriel Bogo (PIC/Uem), Alexandre José Santana (Orientador), e-mail: felipegbogo@gmail.com.
Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas, PR.

Área: Geometria, Subárea: Sistemas dinâmicos

Palavras-chave: bilinear, condição, controlabilidade.

Resumo:

Um sistema de controle bilinear dimensional é uma equação diferencial da forma $\dot{x} = (A + uB)x$ com $x, y \in \mathbb{R}^2, A, B \in Mat_2(\mathbb{R}), u \in \mathbb{R}$. Esse sistema é dito controlável se para todo par de vetores $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, existe uma trajetória do sistema começando em x e terminando em y. Nesta apresentação será dada uma condição geométrica necessária e suficiente para que o sistema bilinear bidimensional ser controlável.

Introdução

Tomando um sistema de controle bilinear $\dot{x} = (A + uB)x$, podemos dizer que ele é controlável se para todo $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, existe $g \in S$ tal que $gx = y$, com
$S = \{e^{t_1(A+u_1B)} \cdots e^{t_k(A+u_kB)}: t_i \geq 0, u_i \in \mathbb{R} para\, qualquer\, k\}$.
Isso é o mesmo que dizer que $Sx = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ para todo $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, com

$$Sx = \{gx: g \in S\}$$

é a órbita de Sem x.

Seja G o grupo do sistema, isto é, o subgrupo das matrizes invertíveis geradas por S. É sabido que G é um grupo de Lie conexos, então é completamente determinado pela sua álgebra de Lie. No caso em que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G é a álgebra das matrizes geradas por A e B. Isso implica que com respeito a topologia de G, S tem interior não vazio. Vamos considerar aqui os sistemas que geram as matrizes 2×2 do grupo de Lie $Sl(2)$ com determinante 1. Para esse sistema foi provado que a controlabilidade é equivalente a $S = Sl(2)$. Mais ainda, $S = Sl(2)$ se, e somente se, age transitivamente na reta projetiva $\mathbb{R}P^1$. Baseado nesses fatos, segue o critério algébrico para controlabilidade de tais sistemas que foi provado em [1].

Teorema 1. Suponha que $A, B \in \mathfrak{sl}(2)$. Então o sistema bilinear bidimensional é controlável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ se, e somente se, $det[X, Y] < 0$.

Aqui iremos interpretar esse critério em termos da posição relativa da reta $A + uB$, $u \in \mathbb{R}$, contida em $\mathfrak{sl}(2)$, com isso provando uma condição necessária e suficiente para a controlabilidade.

Materiais e métodos

Artigos científicos e seminários semanais.

Resultados e Discussão

De resultados gerais de álgebras de Lie e teoria de controle. temos que a condição que $det[A,B] \neq 0$ é equivalente ao fato de que a álgebra de Lie gerada por A e B é $\mathfrak{sl}(2)$. Então, pela condição de controlabilidade do sistema em $Sl(2)$, se o sistema é controlável, segue que S é transitivo em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, então $S = Sl(2)$, ou seja, $G = Sl(2)$.

Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $A \in \mathfrak{g}$, seja $ad(A): \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ a representação adjunta de $\mathfrak{g}$. Lembre que a forma de Cartan-Killing $\kappa: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ é definida por $\kappa(A,B) = tr(adAadB)$. Em $\mathfrak{sl}(2)$ a forma de Cartan-Killing é um múltiplo da forma traço $\kappa(A,B) = tr(AB)$. Da forma traço podemos ganhar a forma quadrática não degenerada $Q(Z) = tr(Z^2)$. O kernel da matriz Q é o conjunto composto com as matrizes $A \in \mathfrak{sl}(2)$ tais que $0 = a^2 + b^2 - c^2$. Com isso, esse conjunto é um cone circular duplo $\mathcal{C}$. Denotamos por $\mathcal{C}_{Int}$ o interior de $\mathcal{C}$ que corresponde a região $\{Z: Q(Z) < 0\}$, e por $\mathcal{C}_{Ext}$ o exterior $\{Z: Q(Z) > 0\}$. O polinômio característico das matrizes de $\mathfrak{sl}(2)$ com uma base apropriada é: $p_A(\lambda) = \lambda^2 - a^2 - b^2 + c^2$. Logo, as matrizes que estão em $\mathcal{C}_{Int}$ são matrizes tais que $c^2 > a^2 + b^2$, então concluímos que seus autovalores são puramente imaginários. Agora, se tomarmos as matrizes de $\mathcal{C}_{Ext}$ temos que $a^2 + b^2 > c^2$ e, portanto, possuem 2 autovalores reais, implicando que, são diagonalizáveis.

Tomando uma matriz de $\mathfrak{sl}(2)$ pela base canônica. Seu polinômio característico é $p_A(\lambda) = \lambda^2 - a^2 - bc = \lambda^2 + detA$. Pelo teorema de Cayley-Hamilton, segue que $A^2 + detAI = 0$. Como $trA^2I = 2A^2$, então pela equação acima, $detA = -\frac{1}{2}Q(A)I$. Dessa forma podemos falar que a forma quadrática é essencialmente o determinante de uma matriz qualquer $A \in \mathfrak{sl}(2)$.

A ideia será relacionar o **Teorema 1** com a posição geométrica da reta $A + uB$ com respeito ao cone $\mathcal{C}$. Claramente, $det(A+uB) = -\frac{1}{2}tr(A+uB)$ é um polinômio em u. Como $tr = (A = uB) = 0$ precisamos explicitar esse polinômio para determinar suas propriedades, com isso temos o seguinte resultado.

Proposição 1. O discriminante do polinômio quadrático $det(A+uB)$ é $-det[A,B]$

Como $det(A+uB) = -\frac{1}{2}Q(A+uB)$, então $u_0 \in \mathbb{R}$ é raiz do polinômio acima se, e somente, se $A + u_0B \in \mathcal{C}$ Então, a proposição acima mostra que

$det[A,B]$ conta o número de retas do tipo $A+uB$, com $u\in\mathbb{R}$ que cruzam $\mathcal{C}$. Com isso temos a seguinte proposição:

Proposição 2. Suponha que $det[A,B]\neq 0$. Então a reta $l=\{A+uB: u\in\mathbb{R}\}$ encontra a região interior do cone duplo $\mathcal{C}$ se, e somente se, $det[A,B]<0$.

Então o Teorema 1 pode ser traduzido de forma geométrica para a seguinte condição de controle:

Teorema 2. Suponha que $det[A,B]\neq 0$. Então o sistema bilinear bidimensional com controles irrestritos é controlável se, e somente se, a reta $l=\{A+uB: u\in\mathbb{R}\}$ encontra o interior de $\mathcal{C}$. Em outras palavras, sobre a condição de rank da álgebra de Lie em $\mathfrak{sl}(2)$, controlabilidade é equivalente a existência de existir $u_0\in\mathbb{R}$ tal que $A+u_0B$ tem autovalores puramente imaginários.

Conclusões

Pela condição geométrica de controle para sistemas biliares em $\mathfrak{sl}(2)$ dada em [1], mostramos que essa condição é equivalente a analisar a posição geométrica da reta $A+uB$ com $A,B\in\mathfrak{sl}(2)$, $u\in\mathbb{R}$ com o cone das matrizes nilpotentes de $\mathfrak{sl}(2)$.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador pela motivação e esforço para a realização do trabalho e ao PET-Matemática UEM.

Referências

[1] BARROS, C. J. B., Gonçalves Filho, J. R., Do Rocío, O. G., & San Martin, L. A. Controllability of two-dimensional bilinear systems. **Proyecciones**, v. 15, n. 2, p. 111-139, 1996.

[2] BRAVO, V. A., & San Martin, L. A.Controllability of two-dimensional bilinear systems: restricted controls and discrete-time. **Proyecciones**, v. 18, n. 2, p. 207-223, 1999.