UM BREVE ESTUDO SOBRE ISOMETRIAS

Daniely Andrade Fonseca (PIBIC/CNPq/UEM), Maria Elenice Rodrigues Hernandes (Orientadora), e-mail: merhernandes@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Matemática / Geometria e Topologia

Palavras-chave: Isometrias, plano hiperbólico, transformações de Möbius

Resumo:

O principal objetivo do trabalho foi estudar e caracterizar as isometrias de dois importantes espaços métricos: O espaço euclidiano e o plano hiperbólico. As isometrias são transformações entre espaços métricos que preservam a distância entre seus pontos. Nesse contexto, pudemos identificar as diferenças que determinados conceitos podem apresentar na geometria euclidiana e na geometria não-euclidiana. Começamos introduzindo as principais propriedades das isometrias em um espaço métrico qualquer. Em seguida, nos restringimos ao espaço $\mathbb{R}^n$, caracterizando suas isometrias por meio das transformações ortogonais e da translação. Para o plano hiperbólico $\mathbb{H}$, fizemos um estudo detalhado das transformações de Möbius. Posteriormente, descrevemos os elementos do grupo geral de Möbius que preservam $\mathbb{H}$ e provamos que esses são precisamente as isometrias do plano hiperbólico.

Introdução

A noção de isometrias é muito importante, não só para a Matemática, como também para outras áreas do conhecimento. As translações, rotações e reflexões, estão constantemente presentes em nossa rotina, sendo utilizadas, por exemplo, na pintura, cerâmica e na tecelagem. Felix Klein (1849 – 1925) foi o primeiro a estudar a geometria baseada em grupos de transformações. Para ele, as homotetias e semelhanças correspondiam ao grupo principal da geometria euclidiana e as isometrias formavam um subgrupo das semelhanças, como características das transformações geométricas que não modificam as propriedades das figuras.

Na geometria euclidiana, as isometrias estão intimamente relacionadas com transformações ortogonais. Uma das principais propriedades a respeito dessas aplicações é que uma isometria do espaço euclidiano pode ser escrita de modo único como uma composição entre uma translação e uma transformação ortogonal. Além disso, descrevemos uma condição para que uma isometria seja uma transformação ortogonal.

Durante muitos anos, a geometria teve como base os princípios estabelecidos pelo clássico trabalho "*Elementos*" de Euclides. Entretanto, ao longo do tempo, alguns matemáticos se questionaram se o quinto postulado de Euclides poderia ser consequência dos outros quatro axiomas. Essas conjecturas levaram ao surgimento de geometrias não-euclidianas.

Na geometria hiperbólica, o postulado das paralelas passou a afirmar que, por um ponto fora de uma reta, pode-se traçar mais de uma reta paralela à reta dada. Grandes contribuições para o estabelecimento da geometria hiperbólica foram dadas por Nicolai I. Lobachevsky, János Bolyai, Karl F. Gauss e Georg B. Riemann.

Nosso interesse é o estudo da geometria do plano hiperbólico $\mathbb{H}$, tomando como modelo local o chamado modelo do semiplano superior, estudado por Poincaré. Para caracterizarmos as isometrias desse espaço, foi necessário o estudo de propriedades do grupo geral de Möbius, em especial dos elementos deste grupo que preservam o plano hiperbólico.

Materiais e métodos

Os principais materiais utilizados foram bibliografias especializadas no assunto. A referência [2] foi essencial para os conceitos básicos de espaços métricos e a referência [4] para o estudo das isometrias entre superfícies do espaço euclidiano. Destacamos em especial as referências [1] e [3] para o estudo de isometrias do plano hiperbólico. Além disso, utilizamos o software *Geogebra* para a construção de figuras.

Resultados e Discussão

Durante nossos estudos, caracterizamos as isometrias do espaço euclidiano com base no conceito de transformação ortogonal. Mais especificamente, provamos que se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria satisfazendo que $f(0) = 0$, então f é uma transformação ortogonal. A partir desta propriedade, provamos que uma isometria pode ser escrita como uma composição única entre uma translação e uma transformação ortogonal.

Em seguida, o foco foi estudar as isometrias do espaço hiperbólico. Neste contexto, verificamos que as isometrias são exatamente os elementos do grupo geral de Möbius que preservam o plano hiperbólico $\mathbb{H}$, denotado por Möb($\mathbb{H}$). A esfera de Riemann, denotada por $\overline{\mathbb{C}}$, é definida como o conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e tem um papel relevante no trabalho e que nos permite unificar o conceito de reta no plano hiperbólico.

Para caracterizarmos os elementos de Möb($\mathbb{H}$), determinamos uma forma explícita para representar os elementos do grupo geral de Möbius. Em seguida, determinamos os elementos de Möb($\overline{\mathbb{R}}$), que consistem de todos os elementos do grupo geral de Möbius que preservam o eixo real estendido $\overline{\mathbb{R}}$, que é definido por $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definimos um círculo em $\overline{\mathbb{C}}$ como sendo um círculo euclidiano em $\mathbb{C}$ ou a união de uma reta euclidiana com $\{\infty\}$, e um disco em $\overline{\mathbb{C}}$ como sendo uma das componentes do complementar em $\bar{\mathbb{C}}$ de um círculo em $\bar{\mathbb{C}}$. Portanto, temos que $\mathbb{H}$ é um disco em $\bar{\mathbb{C}}$ determinado pelo círculo $\bar{\mathbb{R}}$. Deste modo, para determinar os elementos de Möb($\mathbb{H}$), analisamos o comportamento dos elementos de Möb($\bar{\mathbb{R}}$) sob os discos de $\bar{\mathbb{C}}$, em particular, verificamos quais elementos de Möb($\bar{\mathbb{R}}$) preservam os discos em $\bar{\mathbb{C}}$. Estes serão os elementos de Möb($\mathbb{H}$). Em seguida, definimos uma distância entre dois pontos x e y em $\mathbb{H}$, como sendo o ínfimo dos comprimentos de todos os caminhos unindo x a y. Na verdade, provamos que a distância entre x e y em $\mathbb{H}$ é dada por um segmento de reta hiperbólica unindo esses dois pontos. Por fim, provamos que o grupo geral de Möbius que preserva $\mathbb{H}$ coincide com o conjunto das isometrias de $\mathbb{H}$.

Conclusões

Neste trabalho, conseguimos caracterizar as isometrias tanto no espaço euclidiano, com o qual já estamos habituados, como também no plano hiperbólico, o qual representa um modelo clássico dentro da geometria não-euclidiana. Obtivemos resultados não triviais, em especial, o fato de que as isometrias do plano hiperbólico coincidem com o grupo geral de Möbius que preserva $\mathbb{H}$.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

[1] ANDERSON, J.W. **Hyperbolic Geometry**. 2. ed. Londres: Springer, 2006.

[2] LIMA, E.L. **Espaços Métricos**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1993.

[3] PANSONATO, C.C.; BINOTTO, R.R. **Isometrias do plano hiperbólico**. UFSM, 2010.

[4] TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2008.