

EMPACOTAMENTO DE POLÍGONOS VIA PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

Pedro Henrique da Silva Pinto (PIBIC/CNPq/FA/Uem), Francisco Nogueira Calmon Sobral (Orientador), e-mail: fncsobral@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Departamento de Matemática/Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra, Matemática.

Palavras-chave: Empacotamento, Programação Não Linear, Método Gradiente

Resumo:

Neste projeto, procurou-se modelar e resolver um problema de empacotamento de polígonos convexos no interior de uma região convexa, objetivando-se a alocação do maior número possível de polígonos. Para a resolução do problema, foi utilizado o método gradiente. Por fim, um programa foi desenvolvido na linguagem de programação *Python* a fim de realizar de maneira automática a modelagem e resolução de um problema de empacotamento dado pelo usuário.

Introdução

Em problemas de empacotamento, busca-se alocar o maior número de itens no interior de uma região. Em nosso dia a dia, esses problemas são comuns no transporte de mercadorias. Os produtos transportados geralmente são alocados em contêineres, e utilizar o seu espaço de maneira inteligente possibilita armazenar mais itens em seu interior, acarretando na redução do custo do transporte. Neste trabalho, deseja-se resolver um problema de empacotamento de polígonos convexos no interior de um polígono convexo usando uma abordagem de programação não linear. Em (BIRGIN, 2006), foi utilizado o Método das Sentinelas para empacotar itens em uma região convexa sem sobreposição. Isso foi feito construindo um conjunto finito de pontos chamados sentinelas correspondente a cada item, de modo que dois itens se sobrepõem se, e somente se, as sentinelas de um estão no interior do outro. A abordagem adotada permite a rotação dos itens. Em (BIRGIN, 2010), buscou-se resolver o problema de empacotamento de retângulos idênticos em regiões convexas isotrópicas. A abordagem utilizada permite apenas rotações ortogonais dos itens. Semelhantemente, também foram utilizadas sentinelas. Em (BIRGIN, 2019), foi realizado o empacotamento de elipsoides não necessariamente idênticos, buscando maximizar o número desses objetos no interior do contêiner considerado. Foram utilizados modelos de programação não linear introduzidos pelo mesmo autor.

Materiais e métodos

O problema de empacotamento foi escrito como um problema de programação linear irrestrito, e o método de otimização utilizado para resolvê-lo foi o método gradiente (FRIEDLANDER, 1994). Para a modelagem do problema, considerou-se uma região poligonal convexa $R_1 R_2 \cdots R_n$ e um molde $P_1 P_2 \cdots P_l$ para construir um item poligonal $Q_1 Q_2 \cdots Q_l$, cuja posição e rotação é variável. O problema foi modelado de forma indutiva. Assim sendo, suponha que m itens tenham sido previamente empacotados e gostaríamos de empacotar o polígono $m+1$. A seguir, a função objetivo f será exibida e explicada sucintamente:

$$f(X, \theta) = R(X, \theta) + S(X, \theta) + D(X, \theta),$$

onde

$$R(X, \theta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \max\{n_i^T Q_j(X, \theta) - c_i, 0\}^2,$$

$$S(X, \theta) = \sum_{i=1}^m S_{i,m+1}(X, \theta) \quad \text{e}$$

$$D(X, \theta) = C^T \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l Q_j(X, \theta).$$

Os vértices do item poligonal $m+1$ são descritos da seguinte forma:

$$Q_j = X + M(\theta) \overrightarrow{P_1 P_j}, \forall j \in \{2, 3, \dots, l\},$$

onde $M(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$.

Para cada lado $\overline{R_i R_{i+1}}$ da região poligonal, podemos construir uma restrição no formato $a_i x + b_i y \leq c_i$, onde $a_i x + b_i y = c_i$ é a reta que passa sobre esse lado, de modo que o ponto (x, y) se encontra no interior de $R_1 R_2 \cdots R_n$ quando para cada i , todas essas desigualdades são válidas

simultaneamente. Dessa forma, denotando $n_i = [a_i \ b_i]^T$, definimos a função R acima. Para definir S , devemos olhar para a função $S_{i,m+1}$, que verifica a sobreposição entre o i -ésimo item já empacotado e o item novo. Para cada item i , seja $S_i = \{W_{i,1}, W_{i,2}, \dots, W_{i,o}\}$ o conjunto de suas sentinelas. Para construir este conjunto, serão escolhidos pontos no interior e na fronteira do molde $P_1 P_2 \cdots P_l$. Em seguida, esses pontos serão rotacionados e transladados de acordo com a posição e rotação do i -ésimo item para formar o conjunto S_i . Desse modo, a menos de rotação e translação, temos que os itens possuem as mesmas sentinelas. Definidas as suas sentinelas, podemos construir restrições lineares no formato $n_{i,k}^T X \leq c_{i,k}$ para cada item i e cada lado k desse item, de modo análogo à

construção das restrições relativas à região. Desse forma, a função $S_{i,m+1}$ pode ser definida como segue:

$$S_{i,m+1}(X) = \sum_{j=1}^o \prod_{k=1}^l \max\{c_{i,k} - n_{i,k}^T W_{m+1,j}, 0\}^2 + \sum_{j=1}^o \prod_{k=1}^l \max\{c_{m+1,k} - n_{m+1,k}^T W_{i,j}, 0\}^2$$

Note que R é positiva se, e somente se, o item está localizado fora da região. Dependendo da escolha das sentinelas e de características geométricas dos itens, também é possível dizer que S é positiva se, e somente se, os itens estão em sobreposição. Para que os itens sejam todos deslocados para uma mesma direção, a restrição de direção D foi construída. Basicamente, escolhe-se um vetor C , que aponta para a direção contrária à desejada, e depois calcula-se o baricentro do item, de modo que minimizar D significa deslocar o centro de massa do item o máximo possível na direção contrária a C . Dessa forma, o problema consistirá em minimizar f , e uma solução será considerada viável se R e S forem nulas. Por fim, um programa de computador na linguagem *Python* foi escrito para modelar e resolver os problemas de empacotamento automaticamente.

Resultados e Discussão

Será apresentado o resultado de um problema de empacotamento resolvido pelo programa. Considere a região formada pelos vértices (9, 1), (22, 1), (28.5, 12.26), (22, 23.52), (9, 23.52) e (2.5, 12.26), e o item poligonal cujos vértices são (0, 0), (3, 0), (3, 3) e (0, 3), isto é, um quadrado de lado 3. Para a construção das sentinelas, vamos utilizar os vértices do item, e o seguinte conjunto de pontos: (1.5, 1.5), (0.7, 0), (2.1, 0), (0.7, 3), (2.1, 3), (0, 0.7), (0, 2.1), (3, 0.7) e (3, 2.1). Após inserir esses dados no programa, o problema foi modelado, resolvido e seu resultado apresentado graficamente como na Figura 1.

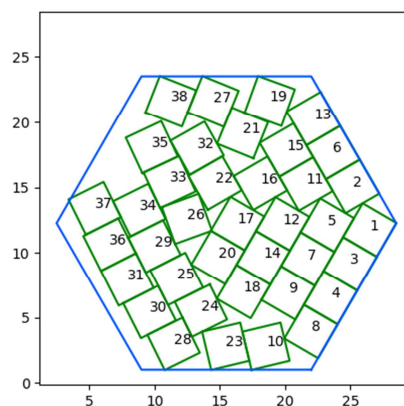


Figura 1 – Solução do problema de empacotamento.

Foram empacotados 38 polígonos no interior da região considerada, e o tempo decorrido foi de 32 minutos. Em geral, os problemas resolvidos apresentaram soluções razoavelmente boas, porém o tempo gasto para solucioná-los foi grande. Para amenizar o problema, foram utilizadas técnicas para reduzir o comportamento de zigue-zague das sequências geradas pelo método gradiente. Tal comportamento tornava a convergência lenta. Além disso, o programa utiliza a derivada analítica de f , e uma estratégia para não comparar todos os itens foi implementada, proporcionando também um ganho no desempenho. Por fim, o uso de outros algoritmos de otimização disponíveis na biblioteca *scipy.optimize* reduziu significativamente o tempo necessário para resolver um problema.

Conclusões

O problema de empacotamento de polígonos convexos em uma região convexa por meio de programação não linear foi modelado e resolvido. Além disso, um programa de computador foi escrito para modelar e resolver os problemas de forma automática. As soluções apresentadas por esse programa foram razoáveis, no entanto o tempo gasto para resolvê-los foi grande. Para reduzir este tempo, algumas estratégias foram adotadas, contudo o problema ainda persiste, de modo que atualmente nossos esforços estão concentrados em tornar o programa mais rápido.

Agradecimentos

Quero agradecer ao CNPq (2009/2020) pelo apoio financeiro, ao meu orientador por me guiar ao longo do projeto, e a minha família por sempre me incentivar.

Referências

- BIRGIN, Ernesto G.; LOBATO, Rafael D. A matheuristic approach with nonlinear subproblems for large-scale packing of ellipsoids. **European Journal of Operational Research**, v. 272, n. 2, p. 447-464, 2019.
- BIRGIN, Ernesto G. et al. Method of sentinels for packing items within arbitrary convex regions. **Journal of the Operational Research Society**, v. 57, n. 6, p. 735-746, 2006.
- BIRGIN, Ernesto G.; LOBATO, Rafael D. Orthogonal packing of identical rectangles within isotropic convex regions. **Computers & Industrial Engineering**, v. 59, n. 4, p. 595-602, 2010.
- FRIEDLANDER, Ana. **Elementos de Programação Não-Linear**. 1. ed. São Paulo: Campinas, 1994.