TRANSFORMADAS DE LAPLACE E FOURIER E SUAS APLICAÇÕES NA ENGENHARIA ELÉTRICA

Igor do Valle Souza (PIBIC/CNPq/FA/Uem), Juan Amadeo Soriano Palomino (Orientador), Ligia Bittencourt Ferraz de Camargo (Coorientadora), e-mail: ra107873@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra/ Matemática

Palavras-chave: laplace, fourier, parseval

Resumo:

A Transformada de Laplace é uma ferramenta para converter equações no domínio do tempo em equações no domínio da frequência, de modo a facilitar a resolução dessas equações. Quanto à Transformada de Fourier, ela fornece uma descrição no domínio da frequência de funções não periódicas no domínio do tempo (NILSSON e RIEDEL, 2009). Dessa forma, o objetivo deste projeto é mostrar os conceitos principais, bem como aplicações dessas transformadas, de Laplace e Fourier.

Introdução

A Transformada de Laplace envolve a transformação de uma função no domínio do tempo para o domínio da frequência, facilitando consideravelmente diferentes problemas, principalmente quando se trata de circuitos elétricos, pois elimina a necessidade de se trabalhar com fasores. A Transformada de Fourier, assim como a de Laplace, é uma transformada de integrais, a qual transforma uma função no tempo para o domínio da frequência, sendo muito útil em sistemas de comunicação e processamento de sinais digitais para situações em que a Transformada de Laplace não se aplica, pois enquanto a Transformada de Laplace lida com circuitos com entradas para $t > 0$ com condições iniciais, a Transformada de Fourier é capaz de lidar com circuitos com entradas para qualquer t (ALEXANDER e SADIKU, 2013). Sendo assim, investigou-se os principais conceitos a respeito das Transformadas de Laplace e Fourier, a fim de possibilitar a resolução de problemas e facilitar a compreensão das aplicações na Engenharia Elétrica, que também foram estudadas.

Materiais e métodos

Os materiais utilizados durante o estudo foram materiais bibliográficos relacionados com o trabalho em questão. A metodologia utilizada foi a realização de seminários semanais dos tópicos deste trabalho sob a supervisão do professor orientador e da professora coorientadora.

Resultados e Discussão

Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace de uma função é representada por

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

onde s é uma variável complexa a qual possui as dimensões da frequência. Sendo assim, a Transformada de Laplace transforma um problema no domínio do tempo para o domínio da frequência, possibilitando a transformação de equações íntegro-diferenciais em equações algébricas mais simples de serem resolvidas. A transformada inversa de Laplace, no entanto, irá transformar uma equação no domínio da frequência para o domínio do tempo, sendo fundamental na solução de problemas. A resolução de equações envolvendo Laplace, geralmente irá depender da tabela de transformadas elementares, como consta na Tabela 2 e de suas principais propriedades, de acordo com a Tabela 1.

Dessa forma, vejamos um exemplo de aplicação de Laplace na Engenharia Elétrica, mais precisamente na área de circuitos elétricos, onde essa ferramenta é muito utilizada. Para isso, considere o circuito elétrico da Figura 1, o qual ao ser transformado para o domínio s, tem seu indutor equivalente a $1s$, o capacitor igual a $3/_s$, resistor igual a 1 e fonte de tensão igual a $1/_s$.

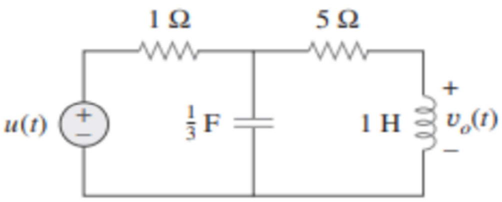

Figura 1 – Esquema do circuito para o exemplo da Transformada de Laplace.

A partir da transformação do circuito para o domínio s, da aplicação de alguns conceitos de circuitos elétricos, tais como as Leis de Kirchhoff, da realização de alguns cálculos e da realização de manipulações algébricas, é possível encontrar uma expressão no domínio s para $v_o(t)$:

$$V_o(s) = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(s+4)^2+(\sqrt{2})^2}.$$

Com isso, basta utilizar a transformada elementar 5 de Laplace da Tabela 2 e aplicar a transformada inversa em $V_o(s)$ para que possamos encontrar $v_0(t)$:

$$v_0(t) = L^{-1}\{V_o(s)\} = \frac{3}{\sqrt{2}}.e^{-4t}sen\sqrt{2}t \;\; V, \quad t \geq 0.$$

Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier, assim como a de Laplace, se trata de uma transformada de integrais a qual transforma uma função no domínio do tempo para o domínio da frequência ω, sendo assim como Laplace, muito utilizada em circuitos elétricos, além de suas aplicações em sistemas de comunicação e processamento de sinais digitais. A definição da Transformada de Fourier pode ser dada por

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt,$$

e sua inversa, ou seja, a transformada da função no domínio da frequência para o domínio do tempo, é dada por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Para a resolução de problemas envolvendo a Transformada de Fourier, normalmente serão utilizadas as Tabelas 1 e 2, onde encontram-se algumas das principais propriedades da transformada e algumas transformadas elementares, respectivamente.

Para que se possa compreender melhor como resolver uma Transformada de Fourier, observe um exemplo prático de aplicação desses conceitos, envolvendo o Teorema de Parseval, que nada mais é que um teorema o qual relaciona a energia associada a um sinal, com sua Transformada de Fourier, afirmando que para um sinal $f(t)$ o qual possui Transformada de Fourier igual a $F(\omega)$, a expressão $|F(\omega)|^2$ é uma medida da densidade de energia correspondente a $f(t)$. Matematicamente, temos que a energia de um sinal é dada por

$$W = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt.$$

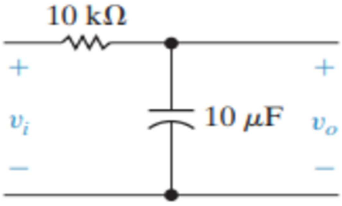

Figura 2 – Filtro RC passa-baixas para o exemplo da Transformada de Fourier.

Considerando o filtro RC passa-baixas da Figura 2, cujo sinal de entrada possui uma tensão $v_i(t) = 15e^{-5t}u(t)\,V$ e energia igual a $22{,}5J$, e sendo a função de transferência do circuito igual a $H(\omega) = \frac{10}{10+j\omega}$, o objetivo é encontrar a porcentagem da energia do sinal de entrada que está disponível na saída.

A Transformada de Fourier da tensão de saída é

$$V_o(\omega) = V_i(\omega)H(\omega),$$

de acordo com conceitos de função de transferência, sendo $V_i(\omega) = \frac{15}{5+j\omega}$ a Transformada de Fourier do sinal de entrada, de acordo com a Tabela 2 (Transformada de Fourier número 6). Assim, o sinal de saída fica $V_o(\omega) = \frac{150}{(5+j\omega)(10+j\omega)}$. Aplicando o Teorema de Parseval, temos

$$W_o = \frac{1}{2\pi}.\int_{-\infty}^{\infty} |V_o(\omega)|^2 = \frac{1}{\pi}.\int_{0}^{\infty} \frac{22500}{(25+\omega^2)(100+\omega^2)} d\omega = 15J.$$

Então, a energia disponível na saída equivale a

$$\eta = \frac{15}{22{,}5}(100) = 66{,}67\%$$

da energia disponível no sinal de entrada.

Tabela 1 – Principais propriedades das Transformadas de Laplace e Fourier, respectivamente.

Propriedades	Função $f(t)$	Transformada de Laplace $F(s)$	Transformada de Fourier $F(\omega)$
Linearidade	$a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$	$a_1F_1(s) + a_2F_2(s)$	$a_1F_1(\omega) + a_2F_2(\omega)$
Fator de escala	$f(at)$	$^1/_a\, F(^s/_a)$	$^1/_{\lvert a\rvert}\, F(^\omega/_a)$

Deslocamento no tempo	$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	$e^{-j\omega a}F(\omega)$
Integração no tempo	$\int_{-\infty}^{t} f(t)dt$	$1/_s F(s)$	$F(\omega)/_{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
Diferenciação no tempo	$d^n f/_{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-)$ $-s^{n-2}f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$	$(j\omega)^n F(\omega)$

Tabela 2 – Transformadas elementares de Laplace e Fourier, respectivamente.

Nº	**Laplace**		**Fourier**	
1.	$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$	$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$
2.	1	$\frac{1}{s}$	1	$2\pi\delta(\omega)$
3.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
4.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$u(t+\tau) - u(t-\tau)$	$\frac{2sen(\omega\tau)}{\omega}$
5.	$e^{at}senbt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$\|t\|$	$-\frac{2}{\omega^2}$
6.	$e^{at}cosbt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$

Conclusões

As atividades referentes ao presente projeto foram executadas de modo que os tópicos estudados a respeito das Transformadas de Laplace e Fourier, bem como toda a estrutura matemática envolvendo estes assuntos, foram de suma importância para uma aproximação do acadêmico com conceitos matemáticos dentro de contextos da Engenharia Elétrica.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro e a UEM pela infraestrutura.
Ao Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino, coordenador do projeto, pela oportunidade, apoio e orientação.
À Prof[a]. Ma. Ligia Bittencourt Ferraz de Camargo, coorientadora do projeto pela confiança e orientação.

Referências

[1] ALEXANDER, CHARLES K.; SADIKU, MATTHEW N. O. **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.
[2] NILSSON, JAMES W.; RIEDEL, SUSAN A. **Circuitos Elétricos**. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2009.