CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS E SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS

Gabriel Vinícius Brandão (PIBIC/CNPq/FA/Uem), Eduardo Brandani da Silva (Orientador), e-mail: ebsilva@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências de Ciências Exatas/Maringá, PR

Matemática – Matemática Aplicada

Palavras-chave: códigos corretores de erros, sistemas dinâmicos caóticos.

Resumo:

O projeto tem como proposta o estudo das estruturas geométricas e algébricas envolvidas na construção e caracterização dos códigos convolucionais corretores de erros e ainda o estudo dos conceitos de órbita, a dinâmica do mapa quadrático $Q_c(x) = x^2 + c$, diagramas de órbita e introdução ao Caos que fazem parte da caracterização dos sistemas dinâmicos discretos. O objetivo principal desta proposta é incentivar o estudante na participação ativa em áreas de pesquisa atuais, dando oportunidade de desenvolver a autonomia, o espírito investigativo e a pesquisa, estimulando-o a formular e verificar conjecturas pertinentes ao estudo dos códigos convolucionais corretores de erros e sistemas dinâmicos.

Introdução

Daremos aqui uma introdução aos dois principais conceitos do projeto: códigos convolucionais corretores de erros e sistemas dinâmicos discretos.

O motivo pelo qual se constroem códigos corretores de erros como um todo está na necessidade de transmitirmos informações de um lugar para o outro. Imagine uma conversa há 200 anos atrás, por exemplo. Antes da invenção do telégrafo e do telefone, tínhamos poucas maneiras de transmitir uma informação que não fosse falando em uma praça pública. A mensagem, contudo, ao ser transmitida, sofre ruídos, os quais são inerentes à comunicação. Com o avanço da tecnologia, novas maneiras de transmitir mensagens diferentes surgiram, e cada vez gostamos mais de transmitir mensagens. Assim, os códigos corretores de erros são uma forma bem estruturada de corrigir a mensagem, buscando eliminar os ruídos. Os códigos corretores de erros possuem tipos, e o mais clássico deles vem de uma teoria de Claude Shannon, e são chamados (informalmente) de códigos de bloco. Em 1955, contudo, Peter Elias apresentou uma forma diferente de

realizar a correção, e introduziu os códigos convolucionais corretores de erros.
Um sistema dinâmico por sua vez é qualquer sistema que envolva processos que estão em constante mudança. O clima, a bolsa de valores ou o movimento de um pêndulo representam sistemas dinâmicos. O principal objetivo de um cientista que estuda sistemas dinâmicos é, portanto, predizer comportamentos futuros. Estudamos assim, o comportamento de sistemas dinâmicos aparentemente muito simples matematicamente, na esperança de que possamos ter uma noção do comportamento de sistemas mais complexos. Por exemplo, conseguimos predizer como um pêndulo irá se movimentar (dada algumas condições), de acordo com a Física, porém não temos como saber se estará ensolarado daqui um ano. Algumas vezes, sistemas dinâmicos aparentemente simples, como a função quadrática $Q_c(x) = x^2 + c$ estudada neste projeto, podem se comportar de maneira extremamente impredizível, caótica.

Revisão da literatura

O estudo deu-se por meio da leitura de livros e artigos relacionados ao assunto, bem como a apresentação de seminários semanais com o orientador, e leituras aprofundadas em encontros.

Resultados e Discussão

Tomemos um espaço finito, normalmente este sendo o $\mathbb{F}_2$ = {0, 1}, o espaço binário. Um código convolucional é pensado como um código linear sobre este espaço, contudo, os bits de informações por ele codificados não são organizados em blocos, mas sim, formam uma sequência infinita e dependente do tempo. Dizemos que um código convolucional é linear, pois dada uma sequência infinita de entrada $\boldsymbol{u}$=u0u1... o codificador irá, em dependendo de quantas funções lineares a saída está submetida, entrelaçar e fazer operações com $\boldsymbol{u}$, resultando na saída $\boldsymbol{v}$. Essas operações são todas lineares em $\mathbb{F}_2$. Veja o exemplo do codificador convolucional da Figura (1). Neste exemplo, as funções às quais estão submetidas as saídas são respectivamente f1=(11100...) e f2=(10100...) . Essas funções podem ser obtidas diretamente da figura (realização) do codificador, onde a função f1e f2 representam as saídas nas primeira e segunda “linhas” (observe os sinais de $\oplus$). Neste codificador em específico, temos uma taxa R=1/2, uma vez que para cada bit de entrada, dois bits de saída são emitidos através do canal. O registrador, neste caso de **memória** ou **comprimento** 2 são as “caixas” (memórias) por onde os bits de entrada são “empurrados” para se formarem as saídas, que, por sua vez, podem ser vistas como uma convolução da entrada com as funções f1e f2.

Dessa forma, a saída pode ser entendida como:

$$\boldsymbol{v}=(v0^{(1)}v0^{(2)}v1^{(1)}v1^{(2)}...) =f(\boldsymbol{u})=f(u0u1...)$$

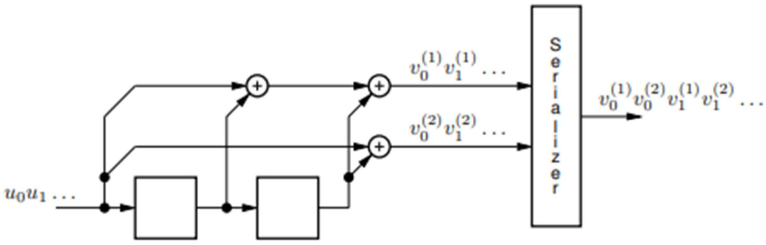

Figura 1 - Exemplo de um codificador convolucional. Fonte: (Johannesson; Zingangirov, 2015).

Viterbi inventou um simples, porém poderoso, algoritmo para a decodificação das informações. O **algoritmo de Viterbi** explora a estrutura de uma treliça (Figura (2.a)) para performar uma decodificação com máxima verossimilhança, isto é, de forma a reduzir a distância de Hamming entre as palavras recebida e enviada. De forma simples, o algoritmo conta os dígitos que foram recebidos errados eliminam-se os caminhos com mais erros (pois estes não poderiam possivelmente ser os caminhos corretos). Portanto, ao chegar ao fim da treliça, há somente um caminho sobrevivente, e com mínima distância de Hamming entre alguma palavra do código. Esta palavra é então escolhida como a palavra enviada. Um exemplo de decodificação pode ser encontrado na referência (Johannesson; Zingangirov, 2015, p. 33).

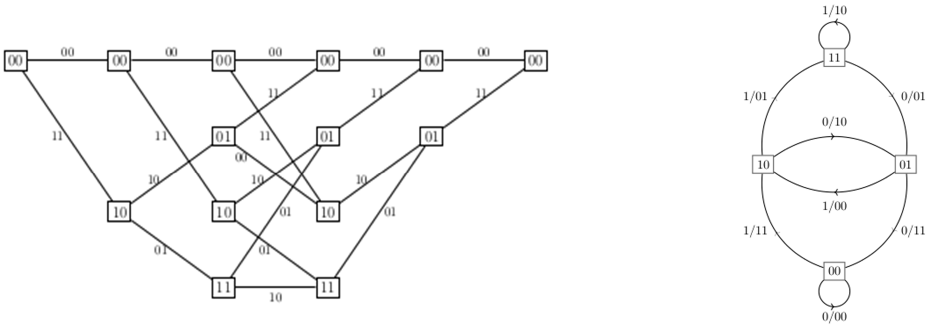

Figura 2 - (a): Diagrama de treliça para o codificador da Figura (1). **(b):** Diagrama de transição de estados para o codificador da Figura (1).

Agora trataremos os sistemas dinâmicos caóticos. O conceito mais primordial ao estudo é o de órbita. Definimos a órbita de x_0 sobre F como sendo a sequência de pontos $x_0, x_1 = F(x_0), \ldots, x_n = F^n(x_0)$, isto é, fazemos da resposta de uma iteração a entrada da próxima. Neste projeto, tomamos, de maneira geral, para a função F, a função quadrática $Q_c(x) = x^2 + c$.

Quando calculamos diversas órbitas de uma função, temos um único objetivo: observar o comportamento assintótico das órbitas, isto é, o valor “final” da órbita. Este comportamento pode ser dividido em 3: a órbita fica (eventualmente) fixa em um ponto, a órbita (eventualmente) oscila entre n pontos, ou a órbita explode. Aqui, nos interessamos apenas nos dois primeiros casos, pois estes são os únicos que são possíveis colocar em um gráfico. Para a família quadrática Q_c estudada, observe a Figura (3) . À esquerda, neste experimento, foram escolhidos 50 valores de $c \in [-2,2]$ na família quadrática, e mostrando no gráfico os seus valores assintóticos. À direita, vemos o que chamamos de diagrama de órbita, para $x_0 = 0$. Notemos o seguinte: para $c \in [-2,2]$, o comportamento do gráfico apresenta alguns comportamentos interessantes, destacamos as bifurcações que podem ser vistas (porém não definidas), e uma assustadora auto-semelhança. Isto é, se ampliamos o diagrama da direita, ele parecerá o mesmo diagrama! É uma pena que não podemos mostrar com detalhes este comportamento.

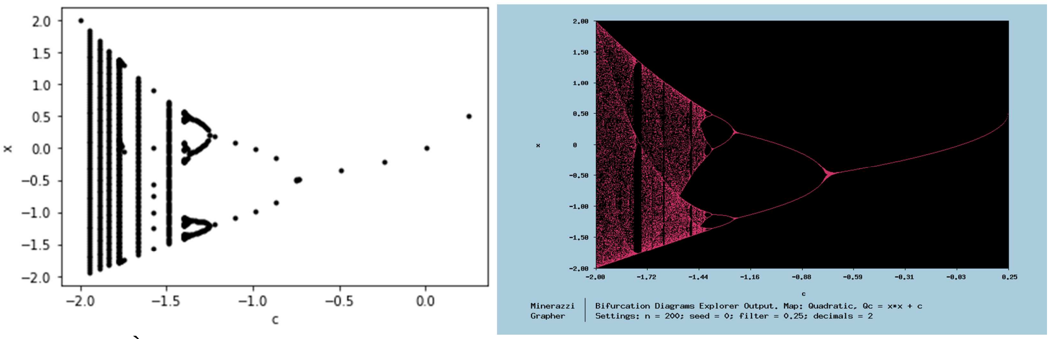

Figura 3 – À esquerda, um esquerda, foram computados as órbitas de 50 valores de $c \in [-2,2]$. À direita, o diagrama de órbitas para a função quadrática.

Além destes comportamentos interessantes, fica o questionamento: e para c fora deste intervalo? Bem, para $c > 2$, todas as órbitas em 0 tendem ao infinito. Já para $c < 2$, após algumas definições no campo da topologia, foi definido o que é o caos. Com esta definição, foi observado que para esses valores, a função quadrática apresenta um comportamento caótico.

Conclusões

Os tópicos estudados sobre os códigos convolucionais corretores de erros, bem como toda a estrutura estudada sobre os sistemas dinâmicos caóticos, foram de muita utilidade para uma aproximação com a aplicação de uma teoria matemática dentro de um contexto tecnológico, bem como diversos outros aprendizados aplicáveis.

Agradecimentos

Agradecimentos vão ao CNPq, à Fundação Araucária e à UEM.

Referências

[1] Johannesson, R.; Zigangirov, K. S. Fundamentals of Convolutional Coding. 2. ed. [S.l.]: IEEE Press, 2015.

[2] DEVANEY, R. L.A First Course In Chaotic Dynamical Systems. 1. ed. [S.l.]: PerseusBooks, 1992. v. 1. ISBN 9780367235994.