

GRUPOS DE PERMUTAÇÕES, AÇÕES DE GRUPOS E SUDOKUS

Luís Miguel Rissi Fertunani (PIC/FNDE/UEM), Jhonatan Bueno de Souza (PIC/UEM - Co-autor), Julio Cesar Moraes Pezzott (Co-orientador), Irene Naomi Nakaoka (Orientadora), e-mail:innakaoka@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra / Matemática

Palavras-chave: ações de grupos, órbitas, Teorema de Contagem de Burnside.

Resumo:

Neste trabalho estudamos dois tópicos importantes da Teoria dos Grupos, a saber: grupos de permutações e ações de grupos, além de suas aplicações na resolução do cubo de Rubik e no problema de contagem de sudokus “não equivalentes”.

Introdução

Em grande parte das resoluções de problemas de contagens, está presente a Teoria dos Grupos, especialmente os grupos de permutações e as ações de grupos. Um exemplo disso, é o caso em que se deseja contar o número de sudokus “não equivalentes”.

Um outro caso em que aplicamos os grupos de permutações e ações de grupos é na resolução do cubo de Rubik. Este é um quebra-cabeça composto por 27 cubos pequenos dispostos em camadas 3x3x3 onde as faces dos cubos são coloridas com 6 cores diferentes. A brincadeira consiste em embaralhar esses pequenos cubos e em seguida arrumá-los de tal forma que os quadradinhos de cada face sejam todos da mesma cor.

Materiais e métodos

Durante o projeto, foram estudados um livro e alguns artigos sobre os assuntos. Em seminários semanais, apresentamos os resultados obtidos.

O livro [3] foi o primeiro a ser estudado, pois aborda a Teoria dos Grupos. Com base no texto [5], vimos vários resultados importantes sobre ações de grupos, entre eles, o Teorema de Contagem de Burnside. Os escritos [1], [2] e [4] foram o suporte para o estudo das aplicações de ações de grupos no problema de contagem de sudokus e na resolução do cubo de Rubik.

Resultados e Discussão

O Sudoku é um quebra-cabeça em que é dada uma matriz 9x9 com algumas entradas preenchidas com elementos do conjunto $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e outras entradas vazias. Para ter sucesso no jogo, é preciso preencher as células vazias com inteiros entre 1 e 9 de modo que, em cada linha, coluna e “bloco” 3x3, cada elemento de A apareça somente uma vez, como podemos ver na Figura 1.

7	5				9			
8			3	7	2			
	2	1					8	
1					8			5
6			9	5				3
9					4			8
	8					4	1	
			6	2	3			7
					1		9	2

7	5	6	8	1	9	2	3	4
8	9	4	3	7	2	5	6	1
3	2	1	5	4	6	7	8	9
1	7	2	9	3	8	6	4	5
6	4	8	1	5	7	9	2	3
9	3	5	2	6	4	1	7	8
2	8	3	7	9	5	4	1	6
4	1	9	6	2	3	8	5	7
5	6	7	4	8	1	3	9	2

Figura 1 – Exemplo de sudoku e sua solução.

Já no sudoku júnior, temos uma matriz 4x4 contendo algumas entradas vazias e outras com elementos do conjunto $\{1,2,3,4\}$. O objetivo do jogador é completar toda a matriz com inteiros de 1 a 4 de modo que em cada linha, coluna e “bloco” 2x2 cada inteiro apareça somente uma vez, como pode ser observado na Figura 2.

	1	4	
4		2	1
	2	1	4
1			

2	1	4	3
4	3	2	1
3	2	1	4
1	4	3	2

Figura 2 – Exemplo de sudoku júnior e sua solução.

Alguns sudokus (e sudokus juniores) são ditos equivalentes. Isso acontece, por exemplo, quando dois sudokus podem ser obtidos um do outro através de uma troca de linhas e uma re-etiquetagem das entradas, como na Figura 3 onde o sudoku à direita é obtido do da esquerda trocando-se as duas primeiras linhas e aplicando o ciclo (1 2 3 4) em cada entrada, isto é, substituindo 1 por 2, 2 por 3, 3 por 4 e 4 por 1.

	1	4	
4	α	2	1
	2	1	4
1			

1	β	3	2
	2	1	
	3	2	1
2			

Figura 3 – Exemplo de sudokus equivalentes.

Nós definimos estes como equivalentes, pois os métodos para solucionar um podem ser aplicados para resolver o outro. Por exemplo, no primeiro sudoku, o elemento α será 3 pois é o único inteiro de 1 a 4 que ainda não aparece na segunda linha. A mesma estratégia pode ser usada no segundo sudoku para descobrir que a entrada β é 4.

Durante os estudos, analisamos algumas manipulações elementares que carregam um sudoku júnior completo para outro. São elas:

- Re-etiquetagem das entradas;
- Trocas das linhas 1 e 2 ou das linhas 3 e 4;
- Trocas das colunas 1 e 2 ou das colunas 3 e 4;
- Trocar as duas primeiras linhas pelas duas últimas;
- Trocar as duas primeiras colunas pelas duas últimas;
- Rotação de 90º no sentido horário;
- Reflexão na diagonal.

Essas permutações podem ser vistas como funções no conjunto X de quebra-cabeças concluídos e assim podemos definir um grupo G gerado por essas funções. Esse grupo agirá em X onde $g \cdot x = g(x)$ para todo $g \in G$ e $x \in X$. Com essas definições, o objetivo do trabalho foi calcular o número de órbitas desta ação, pois este é o número de sudokus “não equivalentes”.

Já em relação ao sudoku 9x9, foram analisadas manipulações similares ao sudoku júnior e analogamente foi definido um grupo G que age no conjunto de sudokus completos.

Ao fim do estudo de aplicação de ações de grupos na contagem de sudokus “não equivalentes”, vimos que o número de órbitas da ação sobre o conjunto X de sudokus juniores completos é 2. Ou seja, existem apenas dois quebra-cabeças de sudokus juniores concluídos não equivalentes. Já sobre os sudokus 9x9, foi encontrado um conjunto de apenas três elementos que geram todos os elementos do grupo G que não são re-etiquetagem das entradas.

Conclusões

Ao longo de todo o projeto, vimos a importância das ações de grupos não só dentro da Teoria de Grupos, mas também na Combinatória, no estudo de sudokus não equivalentes e na resolução do cubo de Rubik. Sabemos agora que com ações de grupos convenientes, obtemos muitos resultados extraordinários.

Agradecimentos

Agradecemos ao FNDE e ao PET.

Referências

- [1] CHAPMAN, H.C. & RUPERT, M.E. A Group-theoretic Approach to Human Solving Strategies in Sudoku, **Colonial Academic Alliance Undergraduate Research Journal**, Volume 3, Artigo 3, 2012.
- [2] CHEN, J. J. **Group theory and the Rubik's cube**. 2004.
- [3] DOMINGUES, H.H. & IEZZI, G. **Álgebra Moderna**, volume 4, Atual Editora, São Paulo, 2003.
- [4] LORCH, C. & LORCH J. **Enumerating Small Sudoku Puzzles in a First Abstract Algebra Course**, PRIMUS, v. 18, n. 2, 2008, 149-157.
- [5] NAKAOKA, I. N. Contando com a Ajuda de Grupos - apostila. IV **Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**. Universidade Estadual de Maringá, 2008.