CÓDIGOS DE COBERTURA

Luiz Henrique Gusmão Rocatelli (PIBIC/CNPq/FA/UEM) ra114141@uem.br, Emerson Luiz do Monte Carmelo (Orientador).

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Matemática/ Matemática Aplicada

Palavras-chave: aritmética modular**,** códigos corretores de erros, códigos de cobertura.

Resumo:

Nesse projeto foram apresentados inicialmente conceitos que serviram de introdução para o projeto, por exemplo, divisibilidade, congruência e aritmética modular. Em seguida trabalhamos com a definição de código, códigos lineares, e formas de gerar tais códigos por meio de matrizes. Finalmente, investigamos o problema das hiper-torres e o problema de encontrar códigos de cobertura.

Introdução

Dado o espaço V=V(n,q) de todas as palavras de comprimento n cujas componentes (letras) assumem um dos valores dentre um conjunto com q elementos, o domínio R-dimensional de x é definido como o conjunto de todos as palavras y em V cuja distância de Hamming não excede R do dado ponto inicial x. Se V(q,n) pode ser dado como uma união de domínios R-dimensional de vetores em H, então H é chamado uma R-cobertura de V. Assim, podemos definir a função K(q,n,R) como a cardinalidade mínima de uma R-cobertura de V(q,n).

O problema da cobertura por hiper-torres consiste em determinar os valores da função K(q,n,R). O caso particular q=8, n=2 e R=1admite a seguinte interpretação por meio de um tabuleiro de xadrez 8x8. O valor K(8,2,1) corresponde ao número mínimo de torres para cobrir (atingir) o tabuleiro inteiro com a movimentação de uma das torres. Intuitivamente, o número K(q,n,R) pode ser pensado como o número mínimo de hiper-torres para cobrir todo espaço finito n-dimensional V(q,n) permitindo que cada hiper-torre realize até R movimentos.

Embora tenha uma interpretação simples, a determinação dos números K(q,n,R) é um problema de pesquisa corrente da teoria combinatória dos códigos e de caráter interdisciplinar, pois envolve pesquisadores da matemática, ciências da computação, engenharia.

Nesta iniciação científica, abordamos pontos introdutórios do tema. Em particular, estudamos conceitos que envolvem disciplinas distintas: combinatória, estruturas algébricas e teoria dos códigos.

O problema precursor da cobertura das hiper-torres foi proposto por Taussky e Todd em 1948, onde inicialmente envolvia grupos abelianos. Na década de 80, trabalhos de Kamps e Van Lint, Stanton, Carnielli entre outros, iniciaram as investigações das coberturas para R arbitrário, generalizando métodos e criando novos enfoques. Porém com certeza ao longo dos anos foram desenvolvidas variantes e generalizações a função K, envolvendo conceitos de coberturas distintas como coberturas múltiplas, por L-esferas e coberturas por esferas com raios distintos.

Para o estudo do problema de cobertura e da função K(q,n,R), a teoria dos códigos é decisiva. Iniciando com a definição de código e seus parâmetros usados, como por exemplo, o tamanho das chamadas palavras código, o espaço a que ele pertence entre outros. Após isso, abordamos a distância de Hamming entre palavras códigos e também sobre a distância mínima de um código C, ou seja, a menor distâncias de Hamming entre duas palavras distintas do código C.

A matriz geradora permite a construção de um código a partir de uma base de um subespaço vetorial. Como a base é linearmente independente, a representação de uma palavra do código construído é única e tal propriedade facilita o desenvolvimento da teoria dos códigos usando teoremas da álgebra linear. O peso de um código C é um parâmetro importante para analisar um código e suas propriedades.

Materiais e métodos

O projeto necessita de várias ferramentas e conceitos preliminares. Revisamos inicialmente o conceito de divisibilidade, apresentando suas propriedades gerais, que serão essenciais para a continuidade dos estudos. O conceito de divisibilidade permite diversas propriedades importantes e teoremas como o Teorema de Bézout e o Teorema de Euclides.

O conceito de divisibilidade é fundamental tanto para a aritmética nos inteiros como para o desenvolvimento da aritmética modular. De fato, congruências e equações diofantinas usadas na aritmética modular derivam de propriedades de divisibilidade. Outros conceitos (como número primo) e princípos (como princípio da boa ordem) também desempenham seu papel na fundamentação da aritmética nos inteiros como na aritmética modular.

O projeto também necessita de conceitos combinatórios, usados na contagem de várias estruturas finitas. Álgebra linear desempenha papel imprescindível na formalização e construção da teoria dos códigos.

A metodologia do projeto foi trabalhada da seguinte forma. Foi realizado um estudo de materiais sobre o conteúdo e com isso eram preparados seminários semanais. Discussão do conteúdo eram feitas com o orientador.

Resultados e Discussão

Esse projeto trouxe alguns resultados. Pudemos perceber como os códigos de coberturas podem ser formalmente definidos e investigados na matemática. Por outro lado, embora exista toda uma formulação matemática, o conceito pode ser trabalhado de modo intuitivo. Por exemplo o problema das hiper-torres pode ser feito em cima de um tabuleiro de xadrez, onde usamos dos movimentos de uma torre para interpretar a cobertura. Essa interpretação geométrica é útil na obtenção de resultados.

Os códigos também estão presentes na loteria esportiva, na transmissão de informações, em mensagens codificados e decodificados. Trabalhar com eles hoje em dia se torna mais fácil usando ferramentas matemáticas e computacionais. Algumas informações enviadas e seus códigos são obtidas com um custo computacional bem alto, necessitando de máquinas computacionais poderosas.

Conclusões

Com esse projeto pudemos aprender um pouco sobre os códigos e coberturas, perceber a forma como tais conceitos estão inseridos na matemática e ver algumas propriedades e aplicações de um código. Há um caráter interdisciplinar, pois o tópico envolve conceitos de disciplinas distintas: álgebra, combinatória, fundamentos de matemática. Esta visão geral possibilita um aspecto rico para ser explorado em uma iniciação científica.

Agradecimentos

Queria agradecer primeiro à CAPES/CNPq e a Universidade Estadual de Maringá pelo apoio financeiro e a oportunidade de ter esse contato com a pesquisa científica agradeço também ao meu orientador por todo apoio e ensinamentos mesmo nesse momento difícil de pandemia. Por fim agradeço a minha família e amigos pelo suporte nesse tempo de projeto.

Referências

A. Hefez e M. L. T. Villela; **Códigos Corretores de Erros**. Série de Computação e Matemática, IMPA, 2002.

C. P. Milies e S. P. Coelho; **Números uma Introdução Matemática**. EDUSP. 1998.

E.L. Monte Carmelo, **Códigos Corretores de Erros**. Apostila UEM, 2020.