30º Encontro Anual de Iniciação Científica
10º Encontro Anual de Iniciação Científica Júnior
30ºEAIC 10ºEAIC JR
11 e 12 de novembro de 2021

INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS COM FUNÇÃO DISTÂNCIA ASSIMÉTRICA

Nathan Henryque Ferreira Barros (PICME-CNPq/Uem), Ryuichi Fukuoka (Orientador), e-mail: ra104321@uem.bs

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Matemática/ Geometria e topologia

Palavras-chave: Espaços métricos, Espaços Quase-métricos, Normas assimétricas

Resumo:

Neste trabalho foram estudadas as quase-métricas, um caso mais geral que a métrica. Conceitos métricos como continuidade, completude e compacidade, foram revisados para a hipótese mais fraca e alguns resultados foram adaptados, sem perder a sua natureza

Introdução

Um espaço métrico consiste de um par (X,d) onde X é um conjunto e d é uma função

$$d: X \times X \to \mathbb{R}^+$$

com as seguintes propriedades:

- $d(x,y) = 0$ se $x=y$;
- $d(x,y) = d(y,x)$;
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

d é denominado de métrica de X enquanto d(x,y) é a distância entre x e y.
O que acontece ao relaxar uma das propriedades de um espaço métrico? Retirarmos a simetria de uma métrica, ou seja, a distância de x até y pode ser diferente da distância de y até x. Denominaremos essa função de quase-métrica e o par (X,h) de espaço quase-métrico.
De forma semelhante é possível definir uma norma assimétrica. Seja X um espaço vetorial e $||\cdot||: X \to \mathbb{R}^+$. $||\cdot||$ é uma norma se satisfaz as seguintes propriedades:

- $||x|| = 0$ se $x=0$;
- $||\lambda x|| = |\lambda|\cdot||x||$;
- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

onde λ é um escalar qualquer. A norma assimétrica F(x) é quando a segunda propriedade é substituída por $F(\lambda\cdot x) = \lambda\cdot F(x)$ quando $\lambda > 0$.

Materiais e métodos

Fizemos encontros semanais de uma hora e quarenta minutos, onde discutimos os assuntos indicados na semana anterior. As dúvidas que surgiram foram discutidas durante a exposição ou então durante a semana em horário pré-definido.

Resultados e Discussão

Em espaços quase-métricos temos duas topologias geradas naturalmente por causa da assimetria. Dado um ponto x e um raio r > 0 a bola B(x;r) e a contrabola $\underline{B}(x;r)$ são conjuntos definidos como

$$B(x;r)=\{y \in X;\ h(x,y) < r\} \text{ e } \underline{B}(x;r)=\{y \in X;\ h(y,x) < r\}.$$

Desta forma, um subconjunto $D \subseteq X$ é aberto (contra-aberto) se para todo $x \in D$ existe $r > 0$ tal que $B(x;r) \subseteq D$ ($\underline{B}(x;r) \subseteq D$).

Um ponto $a \in X$ é fino se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x;\delta) \subseteq \underline{B}(x;\varepsilon)$. De forma análoga dizemos x é grosso se $\underline{B}(x;\delta) \subseteq B(x;\varepsilon)$. Seja $D \subseteq X$. Dizemos que D é fino (grosso) se todo ponto $x \in D$ é fino (grosso), caso D seja fino e grosso então dizemos que D é refinado.

Essa terminologia é semelhante ao que relaciona topologias. Vamos mostrar que elas são equivalentes. Uma topologia □ de X é uma coleção de subconjuntos de X tal que

- □ e X estão em □;
- A união de uma família arbitrária de elementos de □ está em □;
- A intersecção de uma quantidade finita de elementos de □ está em □.

Da mesma forma que todas as bolas em um espaços métrico X geram uma topologia, temos que todas as bolas e contrabolas em um espaços quase-métrico X geram a topologia à direita $\square_{\square}$ de X e a topologia à esquerda $\square_{\square}$ de X.

Dizemos que $\square_{\square}$ é mais fino que $\square_{\square}$ se $\square_{\square} \subseteq \square_{\square}$. Caso $\square_{\square} \subseteq \square_{\square}$ então $\square_{\square}$ é mais grossa que $\square_{\square}$.

Teorema 1:
X é fino (grosso) se e somente se $\square_{\square}$ é mais fino (grosso) que $\square_{\square}$. Em particular, X é refinado se e somente se $\square_{\square} = \square_{\square}$.

A primeira grande característica dos espaços quase-métricos é existir duas topologias naturais no mesmo conjunto, sendo que uma pode ser diferente da outra. Portanto, para qualquer definição ou propriedade que reside somente em uma topologia, existe uma versão análoga para outra topologia.

Uma sequência (x_n) converge à direita (esquerda) a um $x \in X$ se a sequência converge na topologia à direita (esquerda). Se (x_n) convergir em ambas as topologias então diremos que (x_n) é totalmente convergente.
Se uma sequência converge totalmente a um único ponto, esse caso é bem semelhante aos de espaços métricos. Porém uma sequência pode convergir à direita para mais de um ponto.
Usando sequências podemos visualizar o teorema 1 de outra forma. X é fino se e somente se toda sequência que converge à direita à um x converge à esquerda à x.
Para a definição topológica de uma função ser contínua, podemos definir até 15 tipos de funções contínuas distintas, mas iremos trabalhar com 3 delas. Sejam (X,h_X),(Y,h_Y) espaços quase-métricos. Uma função □: $X \rightarrow Y$ é contínua N-D (E-N) se a imagem inversa de um aberto (contra-aberto) em Y é aberto (contra-aberto) em X. Caso □ seja contínua E-N e N-D, então □ é contínua E-D. Assim, propriedades topológicas sobre a topologia esquerda ou direita de Y são propriedades topológicas à esquerda ou à direita em X.
□ é uma função Lipschitziana se existe um escalar c>0 tal que

$$h_Y(□(x),□(y)) \leq c \cdot h_X(x,y)$$

para todo $x,y \in X$. Caso $h_Y(□(x),□(y)) = h_X(x,y)$ então diremos que □ é uma isometria. Da mesma forma que as funções Lipschitzianas são contínuas em espaços métricos, aqui funções Lipschitzianas são contínuas E-D.
Seja X um espaço vetorial de dimensão finita. Considere uma norma assimétrica F e a norma euclidiana $||\cdot||$. Existem m,M>0 tais que

$$m||v|| \leq F(v) \leq M||v||$$

para todo $v \in S$. Através desse resultado é possível provar que 0 é fino e grosso em X. Usando que a função translação □(v) = v + w é uma isometria para qualquer $w \in X$, temos o seguinte teorema

Teorema 2:
Todo espaço vetorial normado assimétrico X de dimensão finita é refinado, ou seja, □$_□$ = □$_□$.

Temos duas definições que não são topológicas, mas sim dependentes da quase-métrica.
Uma sequência (x_n) é de cauchy se para todo ε existe N ∈ □ tal que

$$\text{se } n,m > N \Rightarrow h(x_n,x_m) < \varepsilon.$$

Um espaço quase-métrico X é completo se toda sequência de Cauchy for totalmente convergente.
Se (x_n) converge totalmente a um ponto então (x_n) é Cauchy. Porém se (x_n) convergir somente à direita ou à esquerda, não podemos dizer nada.

Um espaço quase-métrico X é *equilibrado* se dados duas sequências (x_n) e (y_m) tais que □□□$_{□,□\to\infty}$$h(y_m,x_n)=0$ e dois pontos x,y tais que $h(x,x_n) \leq r$ e $h(y_m,y) \leq R$ para todo $n,m \in \mathbb{N}$, então $h(x,y) \leq r+R$.

Uma das propriedades de um espaço ser equilibrado é que se (x_n) for convergente à direita (esquerda) então será a um único ponto.

Um subconjunto $A \subseteq X$ é denso em X se para todo $x \in X$ e toda vizinhança □$_□$ de x temos que $A \cap$ □$_□$ $\neq \emptyset$. No caso do espaço quase-métrico, A pode ser denso em relação a □$_□$ ou □$_□$. Mas como no seguinte resultado vamos usar que X é refinado, então irei dizer somente que o subconjunto é denso.

Lema:

Seja X um espaço quase-métrico refinado e X' um subconjunto denso em X. Considere também Y um espaço quase-métrico completo e □': X' → Y uma função Lipschitziana. Então existe uma única função Lipschitziana □: X → Y tal que□ restrita a X é igual a □'

Para qualquer espaço métrico X é possível encontrar um espaço métrico Y completo onde X é denso em Y. Para os espaços quase-métricos necessitamos de algumas hipóteses.

Teorema 3:

Seja X um espaço quase-métrico refinado e equilibrado. Então existe Y um espaço quase-métrico completo tal que X é um subconjunto denso em Y. Se existir Y' um outro espaço quase-métrico satisfazendo as mesmas condições de Y , então existe □ : Y → Y' uma isometria tal que □ restrita a X é igual a função identidade.

Conclusões

Foi observado que a principal característica da quase-métrica é admitir duas topologias, a saber: A topologia à esquerda e a topologia à direita. Para alguns resultados, basta trabalharmos em somente uma das topologias e conseguimos proceder como no caso de métricas. Já resultados como o teorema 3 necessitam que as duas topologias coincidam. Além disso são necessárias hipóteses novas, como o espaço quase-métrico ser equilibrado.

Agradecimentos

Agradeço ao apoio financeiro do CNPq e a paciência do meu orientador Dr. Ryuichi Fukuoka. Agradeço pela oportunidade de aprender ainda mais.

Referências

Burago, D., Burago, Y., Ivanov, S.: **A course in metric geometry** (Vol. 33), American Mathematical Soc. (2001)

Doitchinov, D.: **On completeness in quasi-metric spaces**. Topology and its Applications, 30(2), 127-148. (1988)

Collins, J., Zimmer, J.: **An asymmetric Arzelà–Ascoli theorem**. Topology and its Applications, 154(11), 2312-2322. (2007)

Mennucci, A. C.: **On asymmetric distances**. Analysis and Geometry in Metric Spaces, 1(2013), 200-231. (2013)