SOBRE A CONJECTURA JACOBIANA

Daniely Andrade Fonseca (PIBIC/CNPq/UEM), Maria Elenice Rodrigues Hernandes (Orientadora), e-mail: merhernandes@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Matemática / Geometria e Topologia

Palavras-chave: Conjectura Jacobiana, polinômios, polígonos de Newton.

Resumo:

O principal objetivo do trabalho foi estudar a Conjectura Jacobiana, especialmente no caso de aplicações polinomiais do plano no plano. A Conjectura Jacobiana é um problema em aberto que lida com um problema clássico em matemática, que é dar condições para que um difeomorfismo local seja um difeomorfismo global. Neste sentido, identificam-se alguns casos em que esta propriedade é verificada e outros em que ela é falsa. Em particular, o estudo desta conjectura no caso de aplicações do plano no plano está associado a determinados polígonos, chamados polígonos de Newton. Desta forma, é possível obter uma visualização geométrica do problema estudado.

Introdução

A Conjectura Jacobiana é um famoso problema matemático ainda não resolvido, conjecturado em 1939 pelo matemático alemão Otto Heinrich Keller (1906 - 1990). O problema pode ser colocado da seguinte maneira: Sejam K o corpo dos reais ou complexos e $F: K^n \to K^n$ uma aplicação polinomial com determinante jacobiano não nulo em todo ponto do seu domínio. Então F é invertível e sua inversa é polinomial. Ainda que apresente um enunciado simples, a Conjectura Jacobiana ainda não foi completamente resolvida, apesar das inúmeras tentativas de prová-la.

O matemático Sergey Pinchuck, em 1994, exibiu um contraexemplo para a Conjectura Jacobiana, para o caso de aplicações polinomiais reais de duas variáveis. Ele apresentou uma aplicação em que, ainda que seu determinante jacobiano seja não nulo, tal aplicação não é injetora. Por outro lado, já foi provado que a Conjectura Jacobiana é válida para qualquer aplicação complexa do tipo $F: K^n \to K^n$, onde $n \geq 2$ e o grau de F é menor ou igual a 2, mas ainda está aberta para o caso em que $n = 3$.

Por volta do ano de 1980, os matemáticos Bass, Yagzhev, Druzkowski, Connel e Wright descobriram que, para verificar a Conjectura Jacobiana, basta verificar se esta é verdadeira para uma classe específica de aplicações polinomiais.

Uma das abordagens deste trabalho foi a utilização dos polígonos de Newton como ferramenta para tratar a Conjectura Jacobiana no caso de aplicações do plano no plano. O grande físico e matemático Isaac Newton descreveu estes polígonos no ano de 1676, em correspondência a Henry Oldenburg, filósofo alemão. Os polígonos de Newton permitem uma visualização geométrica do problema abordado neste trabalho.

Materiais e Métodos

Os principais materiais utilizados foram bibliografias especializadas no assunto. As referências [1] e [2] foram essenciais para o estudo de conceitos básicos de Análise e Topologia. Destaca-se a referência [3] para o estudo da Conjectura Jacobiana e dos polígonos de Newton. Além disso, foram utilizados os softwares *Geogebra* e *Maxima* para construção de figuras e o estudo de polinômios.

Resultados e Discussão

Durante os estudos, apresenta-se a famosa Conjectura Jacobiana. Um problema matemático ainda em aberto em que dada uma aplicação polinomial $F: K^n \rightarrow K^n$, onde $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, cujo determinante da matriz jacobiana de F é não nulo para qualquer $x \epsilon K^n$, então F é injetora ou sobrejetora. Nesse contexto, é possível provar que para $n = 1$ a conjectura é verdadeira; porém, os demais casos podem não ser triviais.

A partir do contraexemplo de Pinchuck, prova-se que a Conjectura Jacobiana é falsa para aplicações polinomiais do tipo $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. A conjectura ainda está em aberto para o caso de aplicações do tipo $F = (f, g): \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, mas se sabe que é verdadeira quando f é linear ou g é linear ou, ainda, o grau de F é inferior a 102. Para $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a Conjectura Jacobiana ainda é um problema em aberto, porém ela é verdadeira para a classe de aplicações polinomiais do tipo $F: K^n \rightarrow K^n$, com $F(x) = X + H(x)$, em que H é uma aplicação polinomial homogênea de grau 3.

Em seguida, relaciona-se o estudo dos Polígonos de Newton com a hipótese da Conjectura Jacobiana. O polígono de Newton $N(f)$ de um polinômio f é a envoltória convexa do conjunto dos pontos de suporte deste polinômio com o ponto (0,0). Com esta ferramenta, é possível obter propriedades interessantes a respeito dos polígonos de Newton de um par de polinômios (f, g) que satisfazem a Conjectura Jacobiana. Tais propriedades foram exploradas nos chamados Teoremas de Semelhança, que são resultados que relacionam os polinômios f e g a partir de uma visão geométrica, mostrando que os polígonos de Newton de f e de g são semelhantes. Assim, apresenta-se também o segundo Teorema de Semelhança, o qual afirma que existe uma proporção entre os polígonos de Newton de f e de g relacionada ao grau de cada um desses polinômios.

Conclusões

Neste trabalho, são apresentados resultados em que a Conjectura Jacobiana se verifica e alguns casos ainda em aberto. Abordam-se também alguns contraexemplos para essa conjectura, o que nos possibilitou ter uma ideia da complexidade deste problema de enunciado tão simples. Dessa forma, obtêm-se resultados que caracterizam determinados pares de polinômios, de modo que os polígonos de Newton associados a tais polinômios são semelhantes.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

[1] LIMA, E. L. **Curso de Análise**, Volume 2. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 5a ed., 1999.

[2] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 6a ed., 2020.

[3] THUY, N. T. B. **Uma introdução à aplicações polinomiais e Conjectura Jacobiana**. Minicurso XXX Semat. Universidade Estadual Paulista - Júlio de Mesquita Filho. São José do Rio Preto, SP, 2018.