UMA INTRODUÇÃO À FÍSICA MATEMÁTICA

Mônica Valério Prates (PIC/UEM), Josiane Cristina de Oliveira Faria (Orientador), e-mail: jcofaria@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas / Maringá, PR.

Matemática - Física Matemática

Palavras-chave: Equações diferenciais, leis de Newton, movimento de partículas.

Resumo:

Neste projeto, foram estudadas as técnicas de modelagem matemática associadas a alguns fenômenos físicos, tais como o movimento de partículas, o movimento das ondas e os fenômenos de difusão. Também foram analisadas algumas das principais propriedades das funções harmônicas e das equações de Maxwell.

Introdução

A Física Matemática consiste de um conjunto de técnicas usadas para modelar e implementar métodos de solução para diferentes processos e situações físicas, sempre valendo-se do rigor matemático. O início do interesse nessa área se deu no século XVIII com Isaac Newton e os estudos da mecânica celestial com a sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, de onde culminaria as famosas leis de Newton. No entanto, desde a antiguidade já havia exemplos da interação entre a Matemática como ciência do intelecto puro e as ciências naturais. Arquimedes, por exemplo, ao mesmo tempo que demonstrava teoremas de geometria também cuidava de questões sobre o equilíbrio dos corpos flutuantes ([5]).
As equações diferenciais começaram a ser a ferramenta matemática mais utilizada nessa área, iniciando com os notáveis matemáticos Newton, Leibniz e os irmãos Bernoulli e, posteriormente, Euler, Lagrange e Laplace fariam grandes avanços na teoria das equações diferenciais parciais.
Nesse contexto da busca pela relação entre o teórico e o prático, e tendo em vista a constante evolução nas pesquisas acadêmicas relacionadas a teoria das equações diferenciais na comunidade científica, neste projeto foram abordados diversos problemas da Física Matemática, tais como a interação de dois corpos, o movimento oscilatório de um sistema massa-mola, o movimento pendular e de uma carga elétrica, o lançamento vertical de um corpo autopropulsado, a propagação das ondas em diferentes meios, os processos de difusão de gases e de condução de calor e os fenômenos eletromagnéticos.

Materiais e Métodos

Durante o projeto, foi utilizado como base o livro [2] e como complementação e suporte para a compreensão de alguns tópicos estudados, também foram utilizadas as referências [1], [3] e [4].

Resultados e Discussão

Dentre os resultados obtidos neste projeto, destaca-se a modelagem do lançamento de um míssil ([2]). De acordo com CIPOLATTI & GONDAR ([2]), ao tomar como hipótese inicial que as distâncias relativas à superfície da Terra são desprezíveis quando comparadas ao raio desta, tem-se dois problemas a serem considerados: o míssil perde massa devido à queima do combustível de propulsão e o sistema não pode ser tratado como um corpo rígido. A segunda lei de Newton para pontos materiais com massa variável no tempo é dada por

$$f_i(t) = \frac{dp_i}{dt},$$

em que $f_i(t)$ é a força que atua sobre a i-ésima partícula e $p_i(t) = m_i(t)v_i(t)$ representa o momento linear no instante t. Para simplificar o problema, as seguintes suposições foram feitas:

1. O míssil é lançado verticalmente do solo;
2. Sejam $M(t)$ a massa do míssil, M_f a massa residual do míssil e $m(t)$ a massa do combustível, então $M(t) = M_f + m(t)$;
3. Sejam m_0 a massa inicial do combustível e k a taxa (constante) de perda de massa devida a combustão, então $m(t) = m_0 - kt$;
4. Seja t_f o tempo de autopropulsão, então $t_0 = \frac{m_0}{k}$;
5. Sejam v_r o módulo da velocidade (constante) com que o combustível escapa, $v_g(t)$ a velocidade do elemento de fluido gaseificado e $v(t)$ a velocidade do míssil. Considerando o sentido positivo contrário a aceleração da gravidade, então $v_g(t) = v(t) - v_r$.

A partir dessas suposições, é possível modelar o problema a partir da segunda lei de Newton. O momento linear do míssil no instante t é $p_1(t) = M(t)v(t)$, enquanto que para a massa do combustível, de acordo com ([2]):

$$p_2(t) = -\int_0^t [v(\alpha) - v_r]m'(\alpha)\, d\alpha = k\int_0^t v(\alpha)d\alpha - k[\alpha]_0^t.$$

Denotando $p(t) = p_1(t) + p_2(t)$, tem-se

$$\frac{dp}{dt} = M(t)\frac{dv}{dt} + v(t)\frac{dM}{dt} + k\frac{d}{dt}\left[\int_0^t v(\alpha)\, d\alpha - (v_t t)\right] = (M_0 - kt)\frac{dv}{dt} - kv_r,$$

em que $M_0 = M_f + m_0$ é a massa total do míssil no momento do lançamento. Levando em consideração que a única força externa que atua sobre o sistema é a força gravitacional, e que ela independe da posição dos diferentes elementos que integram o sistema foguete-gases, então

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{GM_T}{R_t^2}M_0 = -gM_0,$$

sendo M_T a massa da Terra, G a constante gravitacional e R_T o raio da Terra. Logo,

$$-gM_0 = (M_0 - kt)\frac{dv}{dt} - kv_r.$$

Portanto,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{kv_r - gM_0}{M_0 - kt} = \frac{\gamma}{1 - kt/M_0},$$

sendo $\gamma = (kv_r - gM_0)/M_0$. Integrando em t no intervalo $0 \leq t \leq \frac{m_0}{k} = t_f$:

$$\int_0^{t_f} \frac{dv}{dt}dt = \int_0^{t_f} \frac{\gamma}{1 - kt/M_0}dt \Rightarrow v(t) - v(0) = \gamma \int_0^{t_f} \frac{M_0}{M_0 - kt}dt.$$

Fazendo $u = M_0 - kt$, segue que

$$v(t) = v_0 - \frac{\gamma M_0}{k}\int_{M_0}^{M_0 - kt} \frac{1}{u}du = v_0 - \frac{\gamma M_0}{k} ln\left(1 - \frac{kt}{M_0}\right).$$

Integrando novamente os dois lados da equação acima, e tomando $u = 1 - kt/M_0$:

$$\int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t \left[v_0 - \frac{\gamma M_0}{k} ln\left(1 - \frac{kt}{M_0}\right)\right] dt \Rightarrow$$
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{\gamma M_0^2}{k}\int_1^{1-kt/M_0} ln\,(u)\,du,$$

de onde segue que

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{\gamma M_0^2}{k^2}\left[\left(1 - \frac{kt}{M_0}\right) ln\left(1 - \frac{kt}{M_0}\right) + \frac{kt}{M_0}\right].$$

Esta equação fornece a descrição do movimento no caso de autopropulsão, considerando-se a força da gravidade constante.

Conclusões

Após a finalização deste projeto, pode-se perceber que apesar da distinção que ocorreu entre a Matemática e a Física no início do século XX, um dos principais incentivos às pesquisas na Matemática continua sendo fenômenos físicos. Foram trabalhados modelos simplificados para certos sistemas, mas ao considerar os vários fatores internos e externos que ocorrem nas situações reais, as equações diferenciais obtidas se tornam extremamente complexas de serem resolvidas.

Agradecimentos

Os agradecimentos vão à Universidade Estadual de Maringá, por proporcionar essa oportunidade de contato com a pesquisa científica.

Referências

[1] BUTKOV, E. **Mathematical Physics.** New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

[2] CIPOLATTI, R. & GONDAR, J. L. **Iniciação à Física Matemática:** Modelagem de Processos e Métodos de Solução. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[3] IÓRIO, V. M. **EDP:** Um Curso de Graduação. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[4] YOUNG, H. D. & FREEDMAN, R. A. **Sears and Zemansky's University Physics.** 13 ed. California: Pearson Education Inc., 2012.

[5] BUCHWALD, J. & FOX, R. **The Oxford Handbook of the History of Physics.** United Kingdom: Oxford University Press, 2013.