INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL MULTIVARIADA

Júlia Demori Guizardi (PIC/UEM), Francisco Nogueira Calmon Sobral (Orientador), e-mail: fncsobral@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas /Maringá, PR.

Matemática, Matemática Aplicada.

Palavras-chave: aproximação, interpolação, polinômio.

Resumo:

A interpolação polinomial consiste em aproximar uma função por meio de um polinômio para o qual o valor de função em um conjunto de pontos coincide com a função original. O objetivo deste estudo é o cálculo e implementação algorítmica de um polinômio interpolador para funções multivariadas. Para tal fim, usamos polinômios fundamentais de Newton e uma generalização das diferenças divididas na sua construção. Um programa na linguagem Julia foi desenvolvido para interpolações multivariadas com polinômios de grau até dois. Os resultados numéricos comprovam a boa capacidade da aproximação da função verdadeira em um conjunto de funções bem estabelecido em otimização.

Introdução

Seja uma função □ : □ □ → □, na qual sabemos seu valor funcional para um conjunto de pontos de apoio L ⊂ □ □. A interpolação polinomial consiste na ideia de construir um polinômio, □ : □ □ → □ tal que □(□) = □(□) para todo □ ∈ □. A interpolação polinomial nos ajuda a resolver diversos tipos de problemas, como a análise de experimentos científicos (CASTRO, 2017), integração numérica (RUGGIERO; LOPES, 1997) e otimização (CONN; SCHEINBERG; TOINT, 1997). O interesse em calcular polinômio interpolador ocorre principalmente devido ao conhecimento do valor funcional de apenas um conjunto finito de pontos. Há ainda casos em que a função é conhecida e pode ser avaliada em diversos pontos, mas o seu cálculo exige operações muito custosas.
O objetivo deste estudo é encontrar e programar um método de calcular polinômios interpoladores para um conjunto de pontos de apoio dado em □ □, ou seja, um polinômio interpolador multivariado. Assumindo um conjunto L posicionado, existem diversas formas de construir um polinômio interpolador. Neste trabalho, estamos interessados na extensão dos polinômios interpoladores de Lagrange para o caso multidimensional (SAUER; XU, 1995).

Materiais e Métodos

Vamos definir □ □ □ como o espaço dos polinômios em □ variáveis com grau no máximo □. Uma base para esse espaço é a base dos monômios.

Fixando □ e assumindo a existência e unicidade do polinômio interpolador no conjunto L, primeiramente separamos os pontos de L em blocos, seguindo a mesma estrutura de blocos da base de monômios. Desta forma, denotando por □$_□^□$ o número de monômios □-dimensionais com grau exatamente □, podemos reescrever L da seguinte forma:

$$\mathbb{L} = \{x_1^{(0)}|x_1^{(1)}, \ldots, x_d^{(1)}| \ldots |x_1^{(n)}, \ldots, x_{r_n^d}^{(n)}| \ldots\}. \qquad (1)$$

Com tal feito, estudamos duas ferramentas para a construção do polinômio interpolador. A primeira consiste nos polinômios fundamentais de Newton, denotados por □$_□^{[□_0]}$ ∈ □ □$_0$, com □$_0$ ≤ □ ∈ ℕ e □ = 1,…, □$_{□_0}^□$. Cada bloco □$_0$ de polinômios fundamentais está associada a um bloco □$^{□_0}$. Os polinômios devem satisfazer a propriedade de se anularem em todos os pontos de blocos anteriores, □ = 0,…, □$_0$ − 1, e devem valer 1 em apenas um ponto do seu bloco. Com isso, estão unicamente definidos e seu cálculo pode ser efetuado com aplicações simples de Álgebra (ANTON; RORRES, 2001). A outra ferramenta consiste na versão generalizada das diferenças divididas, denotadas por □$_{□_0}$[□^{0},…, □$^{□_0-1}$, □]□, □ ∈ □ □.

Resultados e Discussão

Utilizando os polinômios fundamentais de Newton e as diferenças divididas generalizadas, provamos o teorema apresentado em (SAUER; XU, 1995), que fornece a forma de calcular o polinômio interpolador, dada por

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=1}^{r_j^d} \lambda_j[\mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{x}^{j-1}, x_i^{(j)}]f \cdot p_i^{[j]}(x). \qquad (2)$$

Implementamos um algoritmo na linguagem Julia e realizamos diversos experimentos numéricos com funções conhecidas para avaliar o bom funcionamento do método. Os polinômios encontrados foram utilizados para tentar obter aproximações para minimizadores para algumas funções (CASTRO, 2017).
Como exemplo, na Figura 1(a) podemos ver a aproximação da função de Matyas (MORÉ; GARBOW; HILLSTROM, 1981), dada por

$$m(x) = 0.26(x_1^2 + x_2^2) - 0.48x_1x_2. \qquad (3)$$

Escolhemos um conjunto de 6 pontos para formar o conjunto L, para os quais o valor de □(□) foi dado. O resultado pode ser observado na imagem (b) da Figura 1, onde temos a projeção no plano □□ tanto das curvas de nível da função □ nas curvas cheias, quanto do polinômio interpolador nas linhas, além dos pontos de L destacados em verde. Podemos observar que o polinômio encontrado é exatamente a função de Matyas, como esperado.

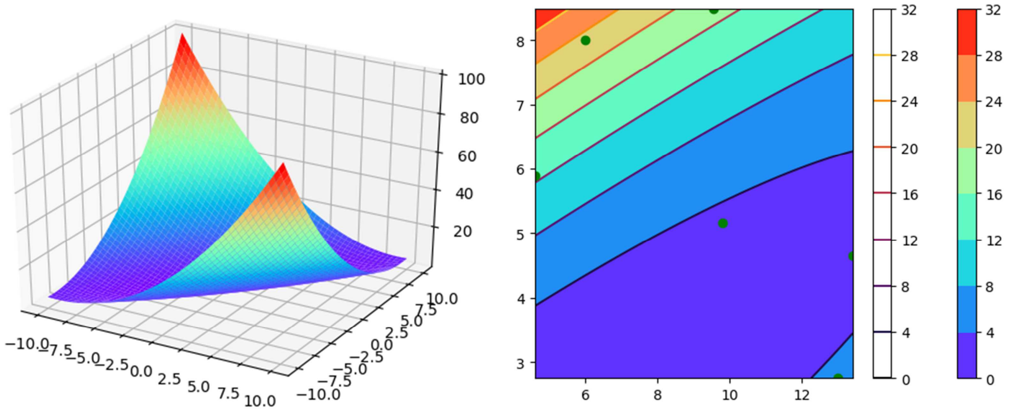

Figura 1 – (a) Função de Matyas. (b) Curvas de nível do polinômio interpolador encontrado representado nas linhas, curvas de nível da função original nas curvas cheias e pontos de L em verde.

Conclusões

Neste trabalho, apresentamos os estudos e experimentos numéricos para a interpolação polinomial de funções multivariadas reais, utilizando polinômios fundamentais de Newton, bem como uma generalização das diferenças dividas, utilizadas na interpolação de funções de uma variável. Através disso, demonstramos a existência e unicidade do polinômio interpolador quando um conjunto posicionado é utilizado. Experimentos numéricos utilizando funções bem estabelecidas em otimização e polinômios interpoladores de grau até dois foram realizados na linguagem Julia. A interpolação mostrou-se exata quando as funções são polinômios de grau dois e de boa qualidade quando o conjunto de pontos encontra-se em uma pequena vizinhança.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. Porto Alegre: Booksman, 2001.

CASTRO, M. R. Biofilm formation on stainless steel as a function of time and temperature and control through sanitizers. **International dairy journal,** 2017.

CONN, A. R.; SCHEINBERG, K.; TOINT, L. Recent progress in unconstrained nonlinear optimization without derivatives. **Mathematical programming**, 1997.

MORÉ, J. J.; GARBOW, B. S.; HILLSTROM, K. E. Testing unconstrained optimization software. **Transactions on mathematical software,** 1981.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico:** aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books Brasil, 1997.

SAUER, T.; XU, Y. On multivariate Lagrange Interpolation. **Mathematics of computation,** 1995.