

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA VIA TOPOLOGIA ALGÉBRICA

Eduardo Atanasio Salomão (PIC/UEM), Marcelo Escudeiro Hernandes (Orientador),
e-mail: ra114103@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Matemática / Álgebra e Topologia Algébrica

Palavras-chave: Homotopia, caminho, grupo fundamental.

Resumo:

O principal objetivo deste trabalho foi estudar Teorema Fundamental da Álgebra, particularmente utilizar ferramentas da Topologia Algébrica para analisá-lo e demonstrá-lo. O Teorema Fundamental da Álgebra, como o próprio nome já diz, é conceito essencial no estudo de raízes de um polinômio com coeficientes em um corpo algebricamente fechado. Neste sentido, a pesquisa foi iniciada por meio da identificação e construção de ferramentas da Topologia Algébrica, como por exemplo, os diversos conceitos de homotopias e grupo fundamental no intuito de convalidar o principal resultado do projeto: o Teorema Fundamental da Álgebra.

Introdução

A Topologia é a área da Matemática que estuda os espaços topológicos, sendo considerada como uma extensão da Geometria com diversas aplicações e resultados importantes. Como Topologia é uma área muito ampla, com diversas subáreas, a divisão mais básica é: Topologia Geral, Topologia Algébrica, Topologia Geométrica. Em específico nessa pesquisa, foram abordados conceitos da Topologia Algébrica, os quais foram essenciais para o objetivo final, tendo em vista que esses conceitos têm uma conexão muito forte com diversas áreas, como por exemplo: a Análise e a Álgebra.

Os estudos foram iniciados com o conceito de homotopia e suas aplicações, assim como Henri Poincaré (1854-1912), um extraordinário matemático francês, que em seu livro “Analysis situs”, publicado em 1895, abordou e introduziu os conceitos de homotopia e homologia, sendo considerado o marco de criação da Topologia Algébrica. Tal conceito foi a base de todo o desenvolvimento. Em seguida, procedeu-se o estudo de tal objeto, foram analisadas algumas de suas propriedades e caracterizações. Tendo em vista a noção de homotopia e suas propriedades, fez-se necessário o estudo de espaços topológicos mais específicos, como por exemplo os espaços contráteis, conexos, estrelados, dentre outros. Desta forma, partindo dos espaços topológicos e homotopias, foi possível motivar uma fundamentação do que é o grupo fundamental de um espaço topológico.

Por fim, considerando toda a construção já feita, pode ser realizada uma caracterização do grupo fundamental para espaços topológicos específicos. Como consequência dessa caracterização, juntamente com aplicações abordadas, obtém-se então, o principal propósito do projeto desenvolvido, ou seja, apresentar características, ferramentas necessárias e suficientes para fornecer uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, essa demonstração já era conhecida por Gauss e fez parte de sua tese de doutorado, juntamente com outras seis demonstrações apresentadas por ele.

Materiais e Métodos

Os principais materiais utilizados foram bibliografias especializadas no assunto. As referências [1], [2], [3], [4] e [5] foram essenciais para o estudo de conceitos básicos de Álgebra e Topologia. Destaca-se a referência [3], que é considerada uma obra essencial para o desenvolvimento do projeto, visto que esta apresenta o estudo de homotopias e grupos fundamentais, gerando as ferramentas necessárias para demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra. Além disso, foi utilizado o software *Geogebra*, para construção de figuras e estudo de polinômios e homotopias.

Resultados e Discussão

Inicialmente no trabalho é apresentado o conceito de homotopia, o qual, de uma maneira informal e intuitiva, relaciona duas funções no caso em que é possível deformar uma das funções na outra continuamente em um dado intervalo de tempo. Tal conceito tem extrema importância pois, a partir dele, podemos definir uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas entre dois espaços topológicos X e Y .

Além disso, quando é possível considerar características específicas nos espaços topológicos X e Y , como por exemplo, caso sejam conexos por caminhos ou contráteis, ganhamos algumas propriedades sobre essa relação de equivalência. Tal relação de equivalência é o que denominamos de relação de homotopia. Assim, dado um espaço topológico X e uma relação de homotopia, como essa relação é, em particular, uma relação de equivalência, tomando o conjunto das classes de equivalência, que comumente chamamos de classes de homotopia, e munindo tal conjunto com a operação de concatenação, obtemos um grupo $([X], \circ)$, em que $[X]$ denota o conjunto de todas as classes de homotopia do conjunto X e $\circ$ indica a operação de concatenação de caminhos. Tal grupo apresenta características bem específicas e é chamado de Grupo Fundamental do espaço topológico X . Para simplificar a notação, o grupo $([X], \circ)$ é, geralmente, indicado simplesmente por $\pi(X)$ em que fica implícita a operação de concatenação.

Em seguida, o foco do projeto foi direcionado para o estudo das propriedades que os grupos fundamentais apresentam, gerando assim diversos resultados interessantes e relevantes, como por exemplo, o de que espaços topológicos homeomorfos

admitem grupos fundamentais isomorfos. Tal resultado, permite ao considerarmos sua afirmação contra-positiva, garantir que espaços topológicos cujos grupos fundamentais não são isomorfos, não podem ser homeomorfos. Além disto, em especial, é possível extrair uma propriedade muito importante e característica das classes de homotopia: o número de voltas de um caminho. Essa propriedade tem um papel crucial em nossa pesquisa, pois ela constitui o principal argumento usado na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Mais especificamente, a propriedade mencionada garante que qualquer polinômio $p(z)$ com coeficientes complexos uma variável e de grau ≥ 1 tem alguma raiz complexa.

Conclusões

Neste trabalho, foi possível estudar o Teorema Fundamental da Álgebra, utilizando especificamente as ferramentas da Topologia Algébrica. Abordaram-se também os conceitos de homotopia e grupo fundamental que tiveram um papel de destaque na pesquisa. Além disso, foi possível observar a interdisciplinaridade dos conceitos acordados no projeto com as aplicações observadas, e no mais, foram explorados resultados que caracterizam propriedades de determinados espaços topológicos e grupos fundamentais, de modo a obter interrelações entre eles.

Referências

- [1] HATCHER, A. **Algebraic topology**. Cambridge University Press, 2005.
- [2] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Edição, Rio de Janeiro, 2020.
- [3] LIMA, E. L. **Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 5ª edição, Rio de Janeiro, 2018.
- [4] MUNKRES, J. R. **Topology**. Second edition, Pearson, 2000.
- [5] STOCCO, R. Z., e EIDAM, J. C. C. **Um Estudo de Espaços Topológicos através de seus Grupos Fundamentais**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2010.