EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO PARA O ESTUDO DE UM MODELO DA COVID-19

Ygor Junior da Silva Santos (PIC/UEM), Patrícia Hilário Tacuri Córdova (Orientadora), e-mail: phtcordova2@uem.br

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas / Maringá, PR

Matemática / Equações Diferenciais Funcionais

Palavras-chave: equações diferenciais com retardamento, Covid-19, self-burnout.

Resumo:

Apresenta-se aqui, uma breve contextualização e motivação por trás do estudo de modelos matemáticos, em particular os que utilizam uma abordagem por equações diferenciais com retardamento (EDRs), que aparecem como um caso particular das equações diferenciais funcionais, e que buscam prever o desenvolvimento de uma determinada população e pandemias. Nesse sentido, é exibida uma modelagem matemática com base em uma EDR que governa a evolução do número de pessoas portadoras da COVID-19 e uma possível medida de biossegurança alternativa para o fim da pandemia, chamada de *self-burnout* (auto extinção, em português) que leva em conta o método de *contact-tracing* (rastreamento por contato).

Introdução

Modelos matemáticos de propagação de doenças são de particular importância no caso de pandemias. Às vezes incapazes de reproduzir seu quadro completo, eles fornecem previsões qualitativas de seu desenvolvimento e revelam os padrões dinâmicos específicos que podem ser úteis no planejamento de medidas preventivas sociais, o que permitiria certo grau de controle da situação.

Assim, nesse projeto, foi feito um estudo de um modelo matemático de propagação da pandemia, utilizando uma aproximação baseada em equações diferenciais com retardamento (EDR), um caso particular de equações diferenciais funcionais, com base na referência [4]. Esses modelos com retardamento seguem a estratégia de delinear o processo de remoção não com uma variável separada, mas com uma mudança de tempo na função que descreve o número de casos acumulativos.

Por outro lado, nota-se que as equações diferenciais ordinárias (EDO) e as equações diferenciais parciais (EDP) estão consolidadas como modelos matemáticos eficazes de fenômenos reais em que a taxa de variação do estado do processo em cada instante t, depende do estado do processo nesse instante t. No entanto, existe um número considerável de eventos em que a taxa de variação do estado em cada momento t, não depende somente do estado do processo nesse instante, mas também depende do histórico de estados do fenômeno.

Em vista disso, os modelos mais apropriados que descrevem tais fenômenos seriam as equações diferenciais com retardamento, pois as soluções desse tipo de equações dependem não somente do conhecimento da mesma num momento t, mas também do conhecimento da solução em um certo intervalo anterior a t.

Materiais e métodos

Durante o projeto, foram utilizadas [1] e [4] como principais referências de estudo e por meio de seminários semanais eram discutidos os assuntos trabalhados durante a semana.

Inicialmente, foi estudada a referência [1], que forneceu a base teórica necessária sobre as equações diferenciais com retardamento para o estudo do modelo de propagação da COVID-19. Além disso, os escritos [2] e [3] forneceram resultados e informações necessárias e importantes para o total entendimento da construção da modelagem em [4].

Resultados e Discussão

Em [4] é feita uma modelagem matemática através de uma EDR para descrever uma possível alternativa para o fim da COVID-19 que não se relaciona com vacinação ou *herd immunity* (imunidade de rebanho, em português) chamada pelos autores de *self-burnout*. Nesse sentido, a estratégia para o *self-burnout* pode ser ilustrada, usando o seguinte exemplo:

“Considere que um país A está sofrendo com o surgimento de casos de COVID-19. O presidente então lança um decreto dizendo que daquele ponto para frente, cada pessoa, esteja se sentindo bem ou não, deve permanecer continuamente em sua casa até novas ordens.

Como a região A é um país ideal, esse lockdown absoluto não gera problemas logísticos de sobrevivência - robôs, drones, etc., entregam comida, remédios e outras necessidades básicas para cada residência do país. Aqueles que não foram expostos ao coronavírus antes do lockdown não contraem a doença agora.

Nesse contexto, levando em conta que o vírus da COVID-19 pode sobreviver dentro de um indivíduo por até 28 dias, aqueles que contraíram o vírus antes do lockdown, ou desenvolvem imunidade à doença ou acabam falecendo. A única maneira de o vírus sobreviver por mais de 28 dias, nesse caso, seria se uma pessoa saudável fosse infectada, o que é impossível devido ao lockdown. Portanto, sem novos portadores por 29 dias, o vírus se extingue completamente.”

Seguindo esse universo ideal, afirma-se em [4] que no mundo real é possível alimentar o vírus com novos portadores em uma taxa tão lenta que a doença eventualmente se auto extingue (*self-burnout*). Dessa forma, o método introduzido que seria responsável pelo *self-burnout* de casos em uma região é o *contact-tracing*, que funciona da seguinte maneira: supondo que X seja um portador da doença, no momento em que X desenvolve o primeiro sintoma, ele é posto em quarentena e as autoridades de saúde se encarregam de "rastrear" o número máximo de pessoas que tiveram contato e foram infectadas por X nos últimos τ dias. Assim, são feitos testes de COVID-19 nesses indivíduos e, então, são colocados em quarentena.

Nesse sentido, através das devidas considerações e argumentações, chegou-se ao seguinte modelo de equação diferencial com retardo que governa a evolução do número de pessoas portadoras da COVID-19 com o tempo:

$$\frac{dy}{dt} = m_0\left(1-\frac{y}{N}\right)\left[y(t)-(1-\mu_3)y\left(t-\frac{\tau_2}{2}\right)-(1-\mu_1)\mu_3 y(t-\tau_2)-\mu_1\mu_3 y(t-\tau_1)\right],$$

onde m_0 é a taxa (pessoas por dia) em que um portador do vírus infecta pessoas saudáveis; N é a população total que ainda é suscetível a contrair o vírus na região; $y(t)$ é o número acumulativo de portadores do vírus até o dia t; τ_1 e τ_2 (retardos) são a quantidade de dias que portadores assintomáticos e sintomáticos, respectivamente, permanecem transmissíveis antes de apresentar sintomas (7 dias e 3 dias, respectivamente); $0 < \mu_1 < 1$ é a fração de casos assintomáticos; e $0 < \mu_2 < 1$ é a fração de portadores indetectáveis pelo *contact tracing*.

Por fim, em [3], obtém-se um critério de estabilidade para as soluções do modelo de EDR anterior, chamado de número de reprodução R, e que é dado por

$$R = m_0\left(1-\frac{y}{N}\right)\left(\frac{1+\mu_3-2\mu_1\mu_3}{2}\tau_1+\mu_1\mu_3\tau_1\right),$$

onde a epidemia se auto extingue com o tempo se $R < 1$ (solução estável), a epidemia cresce exponencialmente se $R > 1$ (solução instável) e cresce linearmente se $R = 1$.

Com esse critério, foi possível obter algumas soluções para a EDR, especificando-se valores para os parâmetros m_0, μ_1, μ_3 da equação para visualizar como ela se comporta ao longo do tempo. A título de exemplo, considere uma cidade ideal B com uma população suscetível inicial N de 300.000 habitantes, começando com 0 casos iniciais e uma taxa de infecção inicial de 100 casos por dia durante os sete primeiros dias. Ainda, suponha que $m_0 = 0.23$, $\mu_1 = 0.8$ e $\mu_3 = 0.75$. Para esses valores, tem-se um número de reprodução inicial $R_0 = 1.13$ e é alcançado $R = 1$ somente em $y = 40.500$ casos.

Nesse caso, a epidemia emerge rapidamente com um crescimento exponencial, como se pode ver na Figura 1. Conforme y aumenta, R gradualmente diminui de maneira que o crescimento desacelera até atingir seu máximo em $y = 39.000$, próximo ao ponto em que R é unitário e, dali em diante, a epidemia procede ao *self-burnout* (note que quanto menor o valor para m_0, melhor são as medidas de biosegurança e mais efetivo é o lockdown da região, e quanto maior o valor de μ_3 menor é a efetividade do *contact tracing* da região).

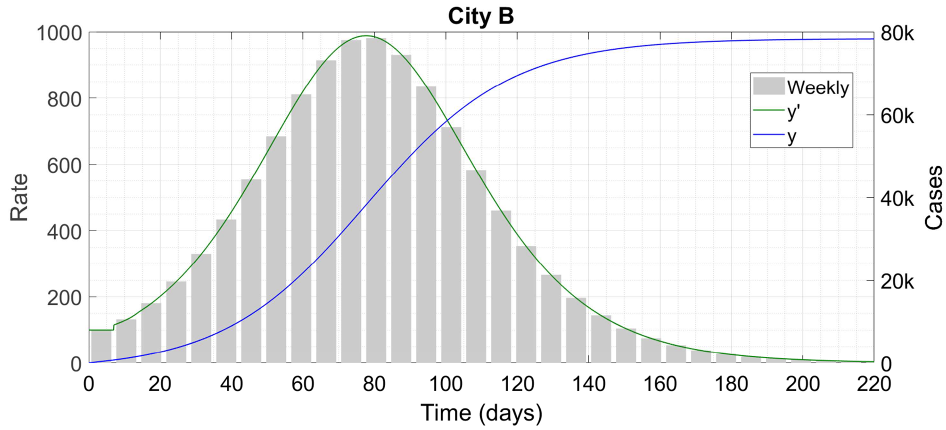

Figura 1 – Cidade B tem um crescimento inicial antes de alcançar o *burnout*. Note que 'k' denota 10^3 (FONTE: Shayak & Sharma (2020, p. 10))

Conclusões

Ao fim do projeto, percebeu-se que as EDRs, diferentemente das equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais, mostram-se essenciais para a descrição tanto qualitativa quanto quantitativa sobre o desenvolvimento de fenômenos que levam em conta informações do passado, em particular a pandemia COVID-19.

Agradecimentos

Agradeço à minha professora orientadora por me aconselhar e guiar durante todo o desenvolvimento do projeto.

Referências

[1] ESTEVAM, L. A. L. **Tópicos de Equações Diferenciais com Retardamento: uma abordagem segundo o trabalho do Prof. Nelson Onuchic**. 65f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2012.

[2] SHAYAK, B. et al. **Transmission dynamics of COVID-19 and impact on public health policy**. MedRxiv, 2020.

[3] SHAYAK, B. & RAND, R. H. **Self-Burnout – A New Path to the End of COVID-19**. Cold Spring Harbor Laboratory, p. 3-7, 22 abr. 2020. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1101/2020.04.17.20069443>

[4] SHAYAK, B. & SHARMA, M. M. **Retarded Logistic Equation as a Universal Dynamic Model for the Spread of COVID-19**. Cold Spring Harbor Laboratory, 12 jun. 2020. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1101/2020.06.09.20126573>