CÓDIGOS CONVOLUCIONAIS VIA SISTEMAS DINÂMICOS CAÓTICOS E FRACTAIS

Gabriel Vinícius Brandão (PIBIC/CNPq/FA/UEM), Eduardo Brandani da Silva (Orientador), e-mail: ra107760@uem.br

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Matemática – Matemática Aplicada

Palavras-chave: códigos convolucionais corretores de erros, conjuntos fractais, sistemas dinâmicos caóticos.

Resumo:

Este projeto tem como proposta estudar códigos convolucionais corretores de erros com modulação PSK contínua. Esses códigos são construídos sobre um alfabeto infinito, e definidos tanto de maneira clássica, isto é, descrevendo-os com um codificador ou por uma matriz de checagem de paridade, quanto da maneira mais interessante, como sistemas dinâmicos caóticos autônomos. Inicialmente, foi utilizado como conjunto de sinais todos os pontos do círculo unitário, e, posteriormente, verifica-se que isso traz algumas desvantagens práticas. Como solução, são criados conjuntos de sinais totalmente desconectados, que, todavia, impõem restrições às palavras-código permitidas. Mapeamentos que resolvem essas restrições e codificam todo o espaço de informações binárias de entrada, bem como suas inversas, a seguir foram estudadas. Por fim, foi avaliado o algoritmo de Viterbi e resultados para o código de Mölle, um código apresentado pela primeira vez em [4], e o principal exemplo da dissertação estudada neste projeto[1].

Introdução

Códigos corretores de erros estão presentes em diversos meios de comunicação que utilizamos no dia a dia. A Figura 1 mostra um esquema simples de um sistema de comunicação com um código corretor de erros. Em todos esses meios, a informação passa por um canal que possui ruídos inerentes, e, assim, perturbam a informação, não sendo possível confiar nela. Em inúmeros casos, como, por exemplo, ao transmitir uma senha de banco através da internet, pode ser essencial que a informação seja confiável.

Assim, este projeto estudou o clássico problema em comunicações digitais de transmitir informações de forma confiável através de um canal ruidoso.

Neste projeto, tratamos da abordagem encontrada em [1], que utiliza um código que, por sua vez, é um clássico exemplo de um sistema dinâmico caótico (no sentido de [2]). Isto é, de forma simples, um código definido por um mapeamento que apresenta uma aparente aleatoriedade, mas que também possui certo grau de organização. Assim, a novidade dessa abordagem é a de utilizar um sistema dinâmico caótico como um código corretor de erros para transmitir e recuperar informações com eficiência e confiabilidade.

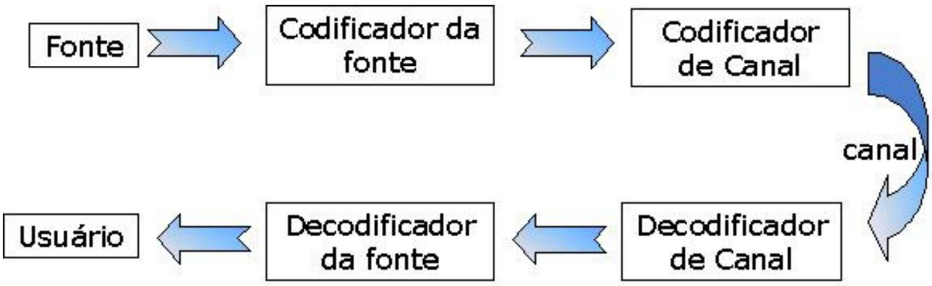

Figura 1 – Sistema de comunicação com um código corretor de erros.

Materiais e Métodos

O desenvolvimento do projeto foi feito por meio da leitura atenta de uma dissertação [1], discussões com o orientador e leitura de artigos relacionados ao assunto. Alguns exercícios também foram realizados em casa para melhor compreensão das proposições do texto principal.

Resultados e Discussão.

Comecemos com algumas definições sobre códigos corretores de erros e sistemas dinâmicos em geral.

Definição 1. Um código C é um subconjunto de um conjunto de sequências A^T, onde cada componente c_j de uma palavra-código pertence ao alfabeto A, e $T \subset \mathbb{Z}$ denota um eixo no tempo.

Então, um código corretor de erros é um subconjunto com algumas sequências. O seu poder de correção de erros é tão maior quanto maior for distância entre as suas palavras. Um código corretor de erros convolucional tem a sua saída dependedente dos estados anteriores. Isto é, posto de forma simples, ele possui memória.

Definição 2. Um sistema dinâmico é descrito por uma funcão f iterada, não necessariamente linear:

$$s(j+1) = f\big(s(j)\big)$$
$$y(j) = f\big(s(j)\big)$$

Onde $s(j)$ e $y(j)$ são o estado e a saída do sistema no tempo j. No nosso caso, o estado e a saída do sistema serão idênticos. Um sistema dinâmico será considerado caótico no sentido encontrado em [2]. Agora, vamos seguir com duas descrições do código de exemplo do projeto, o código de Mölle.

Exemplo. Sejam os símbolos de informação **u** = $(\dots, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots)$, com $u_j \in \{0{,}1\}$ que entram no codificador. Definimos a saída do codificador no tempo t como o ponto no círculo unitário:

$$y_t = e_t^{i\varphi(\boldsymbol{u})}$$

Com,

$$\varphi_{t(\boldsymbol{u})} := 2\pi \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_{t-j}}{2^{j+1}}$$

Que é um codificador convolucional, uma vez que a saída é uma função da entrada atual, mas também de todas as entradas anteriores. Esse codificador difere dos codificadores convolucionais convencionais no fato de que ele produz uma saída contínua, representada por um ponto no círculo unitário, ao invés de uma sequência binária.Em um codificador convolucional comum, possuímos memória finita e não muito maior que 10, digamos. Com base na equação apresentada acima, todavia, parece ser necessário memória infinita (o que é impossível do ponto de vista prático), uma vez que o ângulo de saída no tempo t depende residualmente de todo o seu passado infinito. Porém, podemos reescrever esta equação:

$$\varphi_t = \begin{cases} \dfrac{\varphi_{t-1}}{2} & se\ u_t = 0, \\ \dfrac{\varphi_{t-1}}{2} + \pi & se\ u_t = 1. \end{cases}$$

Que é um procedimento de codificação muito mais simples quando comparado ao somatório outrora apresentado. Essa descrição é chamada de descrição “para a frente”, pois lida com tempo t crescente. Para esta descrição, e para as outras duas descrições estudadas, foi verificada a propriedade de *Código de Grupo* introduzida por Forney em [5]. Essa propriedade simplifica muito a análise e por isso é importante que seja verificada para cada descrição do código.

A outra descrição, chamada de descrição “para trás” é obtida reescrevendo a descrição para frente:

$$\varphi_{t-1}(\boldsymbol{u}) = 2\varphi_t(\boldsymbol{u})\ mod\ 2\pi$$

E olhando-a sob a perspectiva de um sistema dinâmico da definição 2, verificamos que este é de fato um sistema dinâmico caótico, e ainda, que o ângulo φ_t no tempo t contém informação de todo o seu passado infinito. Isto é, a metade semi-infinita de qualquer palavra-código $\boldsymbol{c}_{(\infty,t-1]} = (\dots, \varphi_{t-3}, \varphi_{t-2}, \varphi_{t-1})$ é totalmente determinada pelo seu coeficiente no tempo t.

Para o código de Mölle, foi encontrada uma distância (euclidiana quadrática) mínima bem definida e foi calculada, $d_E^2(C) \approx 6.79$. Foi demonstrado, contudo, que o codificador descrito das maneiras apresentadas é um codificador *catastrófico*[3], isto é, ele pode codificar duas informações de entrada infinitamente distantes em duas palavras código com distância finita. Esta propriedade é uma propriedade do codificador, e não do código. Ainda que outro codificador não-catastrófico tenha sido encontrado, enunciou-se um teorema que garante que se o conjunto de sinais, sobre o qual o mapeamento que define o código, for conectado, não existe uma inversa dele robusta a pequenas perturbações. Essa inversa é imprescindível para que possamos desconstruir a informação recebida em informação útil.

Por isso, criou-se um conjunto de sinais totalmente desconectado (que muito lembra o conjunto de Cantor), mas que impõe restrições às informações que podem ser transmitidas. Esse conjunto é basicamente construído criando-se uma "região proibida" (um arco) no círculo unitário. Isto é, não permitindo transmitir nenhuma palavra código que possua um ponto dentro da região proibida. Determinou-se então um mapeamento para levar todas as possíveis sequências de informações nas sequências permitidas, bem como a sua inversa. Por fim, foi estudada a decodificação com o algoritmo de Viterbi, e foram analisados os resultados das simulações do código quando utilizado para de fato transmitir informações através de um canal com ruído gaussiano.

Conclusões

Este projeto investigou a criação de códigos convolucionais com alfabetos infinitos definidos no círculo unitário. Todo o seu desenvolvimento foi muito importante para o aluno, principalmente no que toca sua familiarização com um contexto de pesquisa científica, mas destacando também enorme desenvolvimento pessoal em geral.

Agradecimentos

Os agradecimentos vão ao CNPq, à Fundação Araucária e à UEM.

Referências

[1] ANDERSSON, H. Convolutional Codes for Continuous Phase Shift Keying. 1994. Dissertação – Linköping University.
[2] DEVANEY, R. L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. New York: Addison-Wesley, 1989.
[3] JOHANNESSON, R.; ZINGANGIROV, K. S. Fundamentals of Convolutional Coding. 2. Ed. [S.1.]: IEEE Press, 2015.
[4] LOELIGER, H.-A. Abelian-group Convolutional Codes for PSK Need Not Be Ring Codes. Sixth Joint Swedish-Russian International Workshop on Information Theory, p. 21-22. Agosto de 1993.
[5] FORNEY, Jr., G. D., "Geometrically Uniform Codes" IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-37, pp. 1241-1260, Setembro de 1991.