TÓPICOS DE TOPOLOGIA

Luan Carlos Rigoleto Fernandes (PIC/UEM), Claudete Matilde Webler Martins (Orientadora), e-mail: cmwebler@uem.br, Janaina Pedroso Zanchetta (Coorientadora), e-mail: jpzanhetta2@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Matemática - Análise

Palavras-chave: Topologia Métrica, Topologia Fraca, Espaços Topológicos.

Resumo:

O objetivo deste trabalho é estudar as Topologias Métrica e Fraca.

Introdução

Iniciaremos a apresentação com a definição de topologia e alguns exemplos de conjuntos munidos com uma topologia, em particular um espaço métrico. Em seguida, será apresentada a definição de aplicação contínua entre dois espaços topológicos, a definição de topologia mais grossa que outra e, por fim, será apresentado um resultado que justifica a existência e unicidade da Topologia Fraca.

Materiais e Métodos

Foram realizadas pesquisas bibliográficas, estudo e discussão teórica do tema abordado.

Resultados e Discussão

Abaixo serão apresentados alguns exemplos, resultados e definições que podem ser encontrados em (BRÉZIS, 1983), (CAVALCANTI, 2011), (LIMA, 1977) e (MUNKRES, 2000), e que serão fundamentais para o entendimento da apresentação.

Definição 01: Uma topologia num conjunto X é uma família Ʈ de subconjuntos de X, chamados abertos, tal que:

- Ø ∈ Ʈ e X ∈ Ʈ.
- Se A_1, A_2,... , $A_n \in$ Ʈ, então $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in$ Ʈ.
- Se $A_\lambda \in$ Ʈ, para todo $\lambda \in L$, então $\bigcup A_\lambda \in$ Ʈ.

Definição 02: Um espaço topológico é um par (X, Ʈ) onde X é um conjunto e Ʈ é uma topologia em X.
Exemplo 01: Seja X um conjunto qualquer. Sempre existem duas topologias em X: $Ʈ_1$ = {∅, X}, chamada topologia caótica, e $Ʈ_2$ = P(X), chamada topologia discreta, onde P(X) representa a família de todos os subconjuntos de X.

Exemplo 02: Seja (M, d) um espaço métrico. A coleção Ʈ = {A ⊂ M: ∀a ∊ A, ∃r > 0; B(a; r) ⊂ A} é uma topologia em M.

Definição 03: Denominamos a topologia Ʈ acima de topologia métrica.

Definição 04: Sejam (X_1, $Ʈ_1$) e (X_2, $Ʈ_2$) dois espaços topológicos. Dizemos que uma aplicação f : $X_1 \rightarrow X_2$ é contínua quando a imagem inversa de todo conjunto aberto em X_2 é um conjunto aberto em X_1.

Definição 05: Sejam (X, $Ʈ_1$) e (X, $Ʈ_2$) dois espaços topológicos. Dizemos que $Ʈ_1$ é mais grossa que$Ʈ_2$, ou que $Ʈ_2$ é mais fina que $Ʈ_1$, quando $Ʈ_1$ ⊂ $Ʈ_2$.

Proposição 01: Suponha que, para todo λ ∊ L, $Ʈ_\lambda$ é uma topologia sobre o conjunto X. Então, Ʈ= ∩ $Ʈ_\lambda$ é uma topologia sobre X.

Proposição 02: Sejam X um conjunto arbitrário, Y um espaço topológico e φ: X → Y uma aplicação. Então o conjunto τ = {φ^{-1}(V): V é aberto em Y é uma topologia em X.

Teorema 01: Sejam X um conjunto arbitrário, $\{(Y_i, \sigma_i)\}_{i \in I}$uma família de espaços topológicos e $(\varphi_i)_{i \in I}$ uma família de aplicações φ_i : $X \rightarrow Y_i$. Então existe uma única topologia mais grossa Ʈ em X para a qual todas as aplicações φ_i são contínuas.

Definição 06: Denominamos a topologia Ʈ acima de Topologia Fraca induzida pelas aplicações φ_i .

Conclusões

O projeto de iniciação científica permitiu o contato com conteúdos que não são abordados durante a graduação e possibilitou a reescrita detalhada de vários resultados presentes nas referências bibliográficas.

Referências

BRÉZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Springer, 1983.

CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N., KOMORNIK, V. **Introdução à Análise Funcional**. Maringá: Eduem, 2011.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.

MUNKRES, J. **Topology**. Uper Saddle River: Prentice Hall, 2000.