ESTUDO DAS EQUAÇÕES DE LOTKA-VOLTERRA E MAY-LEONARD

Luciane Guarnieri Brodbeck (PIC/UEM), Breno Ferraz de Oliveira (Orientador), e-mail: breno@dfi.uem.br

Universidade Estadual de Maringá/Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR

Área e sub-área do conhecimento: Física e Física Geral

Palavras-chave: física, dinâmica populacional, estudo numérico.

Resumo:

As equações de Lotka-Volterra e May-Leonard são muito utilizadas para descrever a interação entre diferentes espécies. No caso das equações de Lotka-Volterra temos a descrição da interação entre presas e predadores. A interação entre espécies em uma cadeia cíclica é descrita pelas equações de May-Leonard. Ambas as equações permitem a coexistência das espécies, mostrando assim ser um excelente modelo para descrever a biodiversidade. Neste projeto estudamos essas equações diferenciais não-lineares e acopladas para obter soluções estacionárias analíticas e numéricas.

Introdução

Um dos maiores problemas da ecologia é explicar a biodiversidade. Essa, em geral, é usada para se referir a variedade e variabilidade de vida na natureza. Apesar da complexidade do problema, existem modelos simples que dão conta de explicar a biodiversidade em alguns sistemas.

Por exemplo, o modelo de Lotka-Volterra [1,2] que descreve a coexistência de presas e predadores por meio de um par de equações diferenciais não lineares. Outro modelo muito utilizado para explicar sistemas com várias espécies é o modelo de May-Leonard. Neste modelo temos uma competição cíclica entre três espécies concorrentes, o sistema exibe oscilações populacionais não periódicas, que foram analisadas na época por Robert M. May e Warren J. Leonard [3].

O principal objetivo deste projeto consistiu em estudar analítica e numericamente o conjunto de equações de Lotka-Volterra e May-Leonard. Para tal, iniciaram-se estudos sobre modelos de Dinâmica Populacional e equações diferenciais não lineares. Em sequência, o estudo de cálculo numérico foi introduzido para solucionar numericamente as equações de Lotka-Volterra e May-Leonard. Posteriormente, buscou-se encontrar soluções estacionárias bem como o estudo da estabilidade das equações.

Materiais e Métodos

Os materiais utilizados no projeto foram *notebook* e *softwares* de licença aberta Gnuplot e Cygwin. Foi utilizada a linguagem C para criar simulações de interação entre as espécies. O Gnuplot foi utilizado para gerar os gráficos dos resultados das simulações e o Cygwin para automatizar esse processo.

Para a geração de gráficos utilizando as equações do modelo de Lotka-Volterra foi feita uma relação matemática entre as equações do modelo para encontrar uma solução para o esboço do espaço de fases para diversas condições iniciais de população de predadores.

Por meio do método de Runge-Kutta, foi obtida uma solução numérica para as equações de Lotka-Volterra para a obtenção do gráfico de comportamento oscilatório entre as espécies.

Para as simulações de interação entre três espécies, do modelo de May-Leonard, foram consideradas as equações que descrevem a dinâmica de *n* competidores que consistem em *n* equações diferenciais de primeira ordem. Para reduzir o número de parâmetros no sistema de três competidores, foram feitas suposições de simetria na taxa de crescimento em relação à competição.

Resultados e Discussão

Por meio da relação obtida entre as equações do modelo de Lotka-Volterra, foi possível gerar um gráfico do espaço de fases para duas diferentes condições iniciais de população de predadores, como mostra a Figura 1.

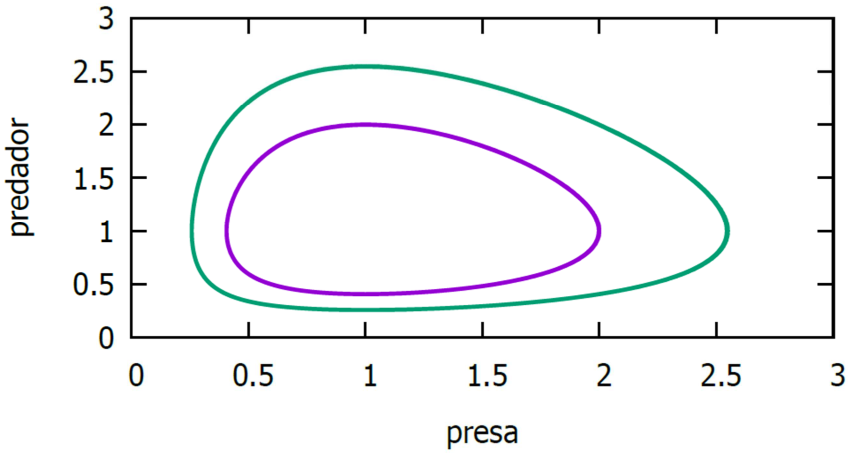


Figura 1: Dinâmica de presas e predadores em um espaço de fase com $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ e diferentes condições iniciais de presas e predadores.

Para a solução numérica, tomando a população inicial de presas $x = 1{,}0$ e predadores $y = 2{,}0$ obtemos o comportamento oscilatório entre as espécies como no gráfico da Figura 2.

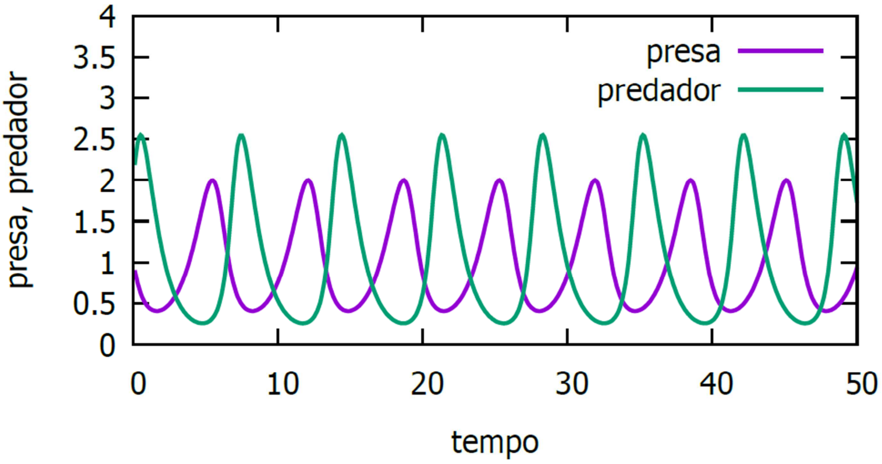
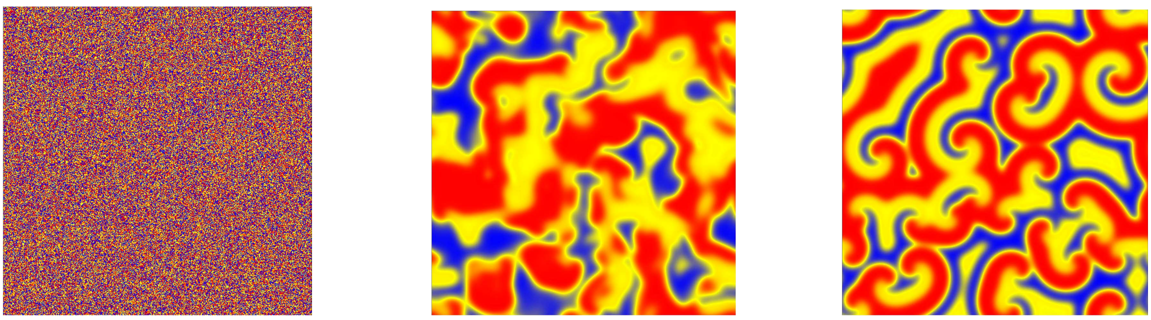


Figura 2 - Solução numérica das equações de Lotka-Volterra para $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 1$.

É possível notar na Figura 2 que a biodiversidade é mantida, mesmo com a variação das populações de presas e predadores.

Para as simulações realizadas com o Modelo de May-Leonard, usamos a equação $D\,/\,2 + r + p = 1$ para definir os parâmetros r (constante de reprodução), p (constante de predação) e D (constante de difusão).

A Figura 3 ilustra a evolução da rede para um valor de mobilidade D diferente de zero. Podemos observar que, além de evoluir no tempo, a rede forma um padrão de espirais com junções triplas.



(a) $t = 0$ (b) $t = 100$ (c) $t = 1000$

Figura 3 – Sequência temporal de imagens mostrando a evolução da rede (500 x 500) para diferentes gerações.

Ao diminuir a mobilidade observa-se uma diminuição no tamanho das espirais. Isso se dá pelo fato de que ao diminuir o valor de *D*, aumentam-se os espaços vizinhos e faz com que a função densidade populacional se relacione com pontos mais afastados, dando a impressão de que as espirais são menores. Mas ao fazer isso, na realidade, estamos nos afastando da rede.

Para os parâmetros de reprodução e predação, quando a taxa de reprodução é maior do que a taxa de predação, a densidade de vazios na rede diminui. Ou seja, quando a reprodução é menor que a predação a cada geração a densidade de vazios diminui.

Quando ocorre o contrário, ao aumentar a taxa de predação em relação à taxa de reprodução há um aumento na densidade de vazios na rede. A densidade de vazios se encontra na interface entre as duas espécies diferentes.

Conclusões

Neste trabalho estudamos a dinâmica de populações por meio dos modelos de presa-predador de Lotka-Volterra e o conjunto de equações de May-Leonard. Por meio do estudo das equações diferenciais não lineares, foi alcançado o objetivo de entender o significado de cada termo das equações, de encontrar soluções estacionárias para as mesmas, estudar a estabilidade dessas soluções e encontrar soluções numéricas dessas equações. Pela solução numérica das equações de Lotka-Volterra foi possível observar que a biodiversidade foi mantida, mesmo com a variação das populações de presas e predadores. Para o modelo de May-Leonard, um estudo da competição cíclica entre três espécies, feito por meio de simulações computacionais, demonstrou a influência das ações de mobilidade, reprodução e predação na rede de espaços ocupados pelas espécies. A evolução no tempo mostrou a formação de um padrão de espirais com junções triplas na rede.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Professor Breno por ter me aceitado como orientanda, por todo o suporte e apoio na conclusão do trabalho e também aos meus familiares que sempre me apoiaram e incentivaram nos estudos.

Referências

[1] LOTKA, A. J. **Analytical Note on Certain Rhythmic Relations in Organic Systems**. Proceedings of the National Academy of Science, v. 6, p. 410–415, July 1920.

[2] VOLTERRA, V. **Fluctuations in the Abundance of a Species Considered Mathematically**. Nature, v. 118, p. 558–560, Oct. 1926.

[3] MAY, R. M.; LEONARD, W. J. **Nonlinear aspects of competition between three species**. SIAM journal on applied mathematics, v. 29, n. 2, p. 243–253, 1975.