31º Encontro Anual de Iniciação Científica
11º Encontro Anual de Iniciação Científica Júnior
31º EAIC 11º EAIC JR
10 e 11 de novembro de 2022

MÉTODO DOS GRADIENTES PROJETADOS

Joaquim Gabriel Martins (PIBIC/CNPq/FA/UEM), Francisco Nogueira Calmon Sobral (Orientador) e-mail: fncsobral@uem.br, Anderson Ervino Schwertner (Coorientador)

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas, PR.

Matemática e Estatística, Matemática Aplicada

Palavras-chave: Método de restrições ativas, Gradiente projetado, Empacotamento

Resumo:

Neste trabalho serão estudados alguns métodos de otimização próprios para a resolução de problemas de programação não linear com restrições lineares de desigualdade. Mais especificamente, o método das restrições ativas e o método do gradiente projetado. Além disso, o algoritmo de Dykstra será estudado, o qual permitirá calcular projeções em espaços onde este cálculo não pode ser feito de maneira trivial. Após o estudo teórico, será feita uma implementação de cada método de otimização na linguagem Julia, a qual será utilizada para resolver problemas de empacotamento com restrição de corte e seus resultados serão apresentados.

Introdução

Considere o problema de minimizar uma função □: □$^{□}$ → □ sujeita a restrições lineares de desigualdade da forma □□ ≤ □, com □ sendo uma matriz real com □ linhas e □ colunas, □ um vetor □-dimensional e □ um vetor □-dimensional. O conjunto viável desse problema é um poliedro e, consequentemente, convexo. Para esse problema, podemos utilizar um tipo especial de algoritmo de otimização, denominado algoritmo de restrições ativas (FRIEDLANDER, 1994). Em cada iteração, é necessário o cálculo da projeção da direção de descida (geralmente o gradiente) no núcleo de uma submatriz formada pelas restrições ativas no iterado atual. Diversas de projeção podem ser usadas, tais como álgebra linear usual e o algoritmo de Dykstra (BIRGIN e RAYDAN, 2005). O algoritmo de Dykstra é um também um algoritmo iterativo, que calcula a projeção ortogonal de um ponto de $\Re^{□}$ em um conjunto convexo. Dado que o problema em questão possui um politopo como conjunto viável, outra estratégia para resolver tal problema é usar Dykstra como projetor em um método do tipo Gradiente Projetado (MARTÍNEZ, 2009). O método de gradiente projetado também projeta a direção de descida no conjunto viável, mas considera todo o conjunto, ao invés daquele formado apenas pelas restrições ativas. Esse método é bastante interessante quando existem algoritmos eficientes para o cálculo da projeção ortogonal no conjunto viável, como é o caso do método de Dykstra para politopos.

Dentre as aplicações para tais métodos, temos o problema de alocar itens poligonais convexos dentro de regiões poligonais convexas. Tais problemas aparecem com frequência em logística, fábricas e distribuidores e são considerados muito difíceis de serem resolvidos.

Materiais e Métodos

O método de restrições ativas para os problemas de interesse neste trabalho pode ser definido como segue. Dado um iterando $\square_{\square}$, de uma iteração $\square$, o subconjunto das linhas de $\square$ que estão ativas em $\square_{\square}$ é selecionado. Com uma direção de descida $\square_{\square}$, que possui a propriedade de decrescer localmente $\square$, em mãos, calculamos uma nova $\hat{\square}_{\square}$, como sendo a sua projeção no núcleo das restrições ativas. Por fim, o novo iterando será $\square_{\square+1} = \square_{\square} + \square\hat{\square}_{\square}$, onde $\square$ é um tamanho de passo adequado para que $\square_{\square+1}$ permaneça no conjunto. O objetivo é gerar uma sequência cujo ponto limite seja um ponto estacionário do problema. A dificuldade do método encontra-se em calcular a projeção no núcleo da submatriz. Neste trabalho testamos duas possibilidades: uma fórmula exata e fechada, utilizando multiplicação de matrizes, e uma versão melhorada de um método aproximado, denominado algoritmo de Dykstra. O método de restrições ativas básico não consegue lidar com o caso de restrições degeneradas (redundantes). Para contornar tal problema o mesmo algoritmo de projeção de Dykstra foi usado para a implementação do método de gradientes projetados. A maior diferença entre os dois é que este último projeta a direção de descida considerando todo o conjunto viável e não mais o subconjunto de restrições ativas. O método estudado foi o definido em (MARTÍNEZ, 2009) por suas boas propriedades de convergência e simplicidade de implementação.

Resultados e Discussão

Os dois métodos foram implementados na linguagem Julia e testados com problemas de otimização envolvendo 2 e 3 variáveis (FRIEDLANDER, 1994). Todos foram resolvidos na casa dos milisegundos, com boas soluções e próximas a solução exata. Assim, temos que o algoritmo se encontrava apto para para a resolução de problemas de minimização de funções mais complexas. Para os problemas de empacotamento que desejamos resolver, podemos modelar circunferências, por meio da não sobreposição e da equação que a define analiticamente. Para figuras convexas, a modelagem se dá a partir da adoção de um vértice de referência. Para problemas de empacotamento do tipo $\square\square\square(0, \square(\square))^2$, onde $\square(\square)$ é uma função implícita no qual, é uma função não linear, as restrições são lineares de forma que em que o número de variáveis depende do número de objetos. Para esse tipo de problema o algoritmo teve limitações em geral, tendo dificuldade de resolver alguns problemas, para o teste foram utilizadas apenas figuras convexas e circunferências. Podemos dividir a modelagem de figuras geométricas em 3 casos (PERALTA et. al., 2018), o quais são, circunferência-circunferência, polígono convexo-circunferência, e polígono convexo - polígono convexo, a partir desses 3 problemas elementares, podemos generalizar os problemas de empacotamento em geral. Alguns resultados iniciais mostram que o método tem dificuldades com os pontos iniciais que adotamos, uma abordagem com uma escolha mais criteriosa de pontos iniciais pode ajudar ao método obter uma solução mais exata.

Conclusões

Neste trabalho resolvemos problemas de otimização não linear com restrições lineares. Os métodos de restrições ativas e de gradiente projetado foram implementados na linguagem matemática Julia. Para o cálculo das projeções, uma versão aprimorada do algoritmo de Dykstra também foi implementada. Embora resultados em problemas simples de otimização tenham sido bem sucedidos, o método não foi capaz de resolver problemas de empacotamento de polígonos convexos em regiões retangulares com sucesso. Acreditamos que mais estratégias têm que ser usadas, como vários pontos iniciais aleatórios, para resolver problemas com um número satisfatório de objetos.

Agradecimentos

Agradecimentos a CNPQ/FA/UEM processo número 1756/2021 pelo financiamento da pesquisa.

Referências

BIRGIN, E. G.; RAYDAN, M.. Robust stopping criteria for Dykstra's algorithm. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 26, n. 4, p. 1405-1414, 2005.

FRIEDLANDER, A. Elementos de programação não-linear. Editora da UNICAMP, 1994.

MARTÍNEZ, J. M. Otimização prática usando o Lagrangiano aumentado. Relatório técnico https://www.ime.unicamp.br/~martinez/opusculo . 2006.

PERALTA, J.; ANDRETTA, M.; OLIVEIRA, J. F.. Solving irregular strip packing problems with free rotations using separation lines. **Pesquisa Operacional**, v. 38, p. 195-214, 2018.