

CONCEITOS BÁSICOS DE TOPOLOGIA GERAL E SUA EVOLUÇÃO

Ester Heloisa Bento (PIC/UEM), Norbil Leodan Cordova Neyra (Orientador). E-mail: nlcneyra2@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

Matemática / Geometria e Topologia

Palavras-chave: Conjunto aberto; espaço métrico; espaço topológico.

RESUMO

Neste trabalho foram desenvolvidos os conceitos básicos da Topologia Geral, explorando espaços topológicos, conjuntos abertos e fechados, funções contínuas e homeomorfismos. Esta pesquisa visa fornecer suporte à aprendizagem da Topologia, compilando fatos históricos e formalizando definições introdutórias, com o intuito de estabelecer a compreensão dos conceitos e desenvolvimento do pensamento topológico. A interligação entre teoria e história, combinada com a exploração da evolução dos conceitos topológicos, pretende oferecer uma compreensão abrangente e servir como base para futuros aprofundamentos.

INTRODUÇÃO

A Topologia, uma disciplina matemática que emerge como uma extensão fundamental da geometria clássica, explora a natureza intrínseca dos espaços e suas propriedades de continuidade. Seu nome, derivado da etimologia que significa "lugar de estudo", reflete sua busca por compreender as características que permanecem inalteradas através de transformações contínuas. A topologia estuda as noções de proximidade e continuidade sem se preocupar com medidas exatas, permitindo uma análise profunda da estrutura geométrica dos espaços.

A história da topologia é notavelmente enraizada em sua evolução ao longo dos séculos. Embora tenha suas origens no século XVII como "Geometriam Situs" (Geometria de posição), foi somente no século XIX que a topologia começou a florescer como uma disciplina distinta. Inicialmente, muitos estudiosos, como Leibniz, contribuíram para seus princípios, porém, foi o trabalho de Euler, influenciado pelo problema das pontes de Königsberg em 1736, que pavimentou o caminho para o desenvolvimento da "analysis situs" e da teoria dos grafos.⁵

A topologia moderna também se encontra profundamente conectada à análise real e complexa, através dos trabalhos pioneiros de matemáticos como Weierstrass, Cantor e Lebesgue.³ A evolução desses conceitos vai desde meras ferramentas analíticas até componentes distintos da topologia, assim marcando uma jornada de refinamento e clareza conceitual.

Nesta exploração da topologia, examinaremos as bases teóricas e as fases cruciais de sua evolução histórica, desde a conexão com a geometria até a posição como uma disciplina autônoma e profundamente influente. Com esse propósito, o foco primordial deste estudo é oferecer suporte à compreensão da Topologia, isso será alcançado através da compilação de fatos históricos e da formulação de definições introdutórias essenciais.

MATERIAIS E MÉTODOS

O presente estudo consiste em uma pesquisa bibliográfica onde optou-se pela análise de caráter qualitativo. Sendo assim, destaca-se a referência 2 como base para a explicação de como Euler resolveu o problema das pontes de Königsberg. As referências 3 e 5 foram necessárias para o desenvolvimento da história da Topologia e as referências 1 e 4 foram essenciais para os conceitos teóricos apresentados que permite a construção de um alicerce sólido para uma exploração mais profunda dos conceitos topológicos. Além disso, foi utilizado o software Geogebra para construção de figuras e homeomorfismos.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

No desenvolvimento do trabalho conseguimos os seguintes resultados e sua discussão respectiva que serão apresentados a seguir:

Na primeira parte discutimos a parte histórica dos conceitos básicos da topologia tais como conjuntos abertos, conjuntos fechados, pontos de acumulação, fecho, L-espaços até chegar às primeiras tentativas para definir um espaço topológico.

Na segunda parte, começamos com as definições formais de tais conceitos. Primeiro definimos esses conceitos para o conjunto dos números reais. Posteriormente, generalizamos esses conceitos para espaço métricos que são conjuntos com uma determinada métrica. De fato, o valor absoluto em $\mathbb{R}$ é um caso particular de métrica sobre $\mathbb{R}$. Finalmente, baseado em resultados sobre espaços métricos, conseguimos definir de forma geral um espaço métrico, onde os espaços descritos anteriormente são casos particulares de espaços métricos.

CONCLUSÕES

Em suma, o referido trabalho explorou a topologia e sua perspectiva histórica, por um viés introdutório. Ao estudar os conceitos primordiais, seus principais nomes e sua linha histórica, fica evidente a importância de Euler com sua percepção de que era impossível percorrer as pontes que ligavam uma ilha no rio ao restante da cidade, sem passar pela mesma ponte duas vezes. Também um ponto que merece destaque é a evolução gradual dos conceitos de ponto interior, conjunto aberto e conjunto fechado, apresentado por uma análise histórica. Além disso, constrói-se uma base conceitual sólida para a definição homeomorfismo, estabelecendo os fundamentos necessários para futuras explorações e aprofundamentos do tema.

REFERÊNCIAS

1. LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.
2. LOPES, F. J. A. Euler e as pontes de Königsberg. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [S. l.], v. 15, n. 30, p. 23–32, 2020. DOI: 10.47976/RBHM2015v15n3023-32. Disponível em: <http://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/82>.
3. MOORE, G. H. The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology. **Historia Mathematica**, v. 35, n. 3, p. 220-241, 2008.
4. MORRIS, S. A. **Topology without tears**. University of New England, 1989.
5. PONT, J. **La topologie algébrique des origines à Poincaré**. 1974. Tese de Doutorado. ETH Zurich.