

## ESTUDO DA FORMAÇÃO DE CLUSTER POR MEIO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Andrey Karvat (PIC/UEM), Breno Ferraz de Oliveira (Orientador). E-mail: bfoliveira@uem.br

Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Física, Maringá, PR.

**Área e subárea do conhecimento:** Física Geral / Física Estatística e Termodinâmica

**Palavras-chave:** Dinâmica de populações; Física computacional; Método de Runge-Kutta.

### RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de reproduzir o artigo *Clustering, advection, and patterns in a model of population dynamics with neighborhood-dependent rates*. Foi feita uma simulação estocástica e um cálculo determinístico usando o método de Runge-Kutta e a teoria de campo médio. Os resultados obtidos foram os mesmos do artigo, clusters sendo formados quando presente uma alta taxa de reprodução entre os indivíduos, e pouco movimento dos mesmos.

### INTRODUÇÃO

*Clusters* do inglês aglomerações, podem ser encontrados em diferentes contextos onde indivíduos de uma população interagem entre si, tais como colônias de bactérias, aglomerados de estrelas e galáxias, pessoas em uma cidade, entre outros. O estudo sobre a formação de *clusters* é muito importante para o entendimento dos diversos tipos de populações citadas.

O método de Monte Carlo baseia-se no uso de variáveis aleatórias para encontrar, com alta precisão, um resultado aproximado de uma simulação complexa [1].

O objetivo deste trabalho é replicar o artigo *Clustering, advection, and patterns in a model of population dynamics with neighborhood-dependent rates* [2]. Tal artigo utiliza movimentos aleatórios dos indivíduos, bem como a probabilidade que cada indivíduo tem de morrer ou reproduzir-se, para a formação dos *clusters*. Foi realizada uma simulação estocástica e um cálculo determinístico usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem e a teoria de do campo médio. As simulações e cálculos numéricos foram realizados usando a linguagem C, e o gnuplot para confecção das imagens.

### MATERIAIS E MÉTODOS

Usou-se o seguinte algoritmo estocástico para simulação de Monte Carlo:

1. Popular um espaço contínuo de tamanho  $L \times L$ , aleatoriamente, com indivíduos;
2. Selecionar um indivíduo aleatório;
  - 2.1. Sortear se o indivíduo vai morrer, reproduzir-se, ou ficar inalterado;
  - 2.2. Mover o indivíduo em uma direção aleatória, com uma distância definida por uma distribuição Gaussiana;
  - 2.3. Quando a advecção é considerada, os indivíduos são transportados por um fluxo externo;
  - 2.4. O tempo é incrementado, e o algoritmo se repete a partir do passo 2.

Usou-se o *Neighbourhood-dependent (ND) model*, modelo dependente da vizinhança, para estabelecer as probabilidades de reprodução ou morte de cada indivíduo. Tais probabilidades foram obtidas com as equações:

$$\lambda(\square) = \lambda_0 \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \frac{\sum_{\square'} \chi(\square')}{\alpha} \right),$$

$$\beta(\square) = \beta_0 \left( 1 - \frac{\sum_{\square'} \chi(\square')}{\alpha} \right),$$

em que  $\lambda(\square)$  e  $\beta(\square)$  são respectivamente as taxas de reprodução e morte de um indivíduo  $\square$ ,  $\lambda_0$  e  $\beta_0$  são, respetivamente, as taxas de reprodução e morte padrões, sendo que o valor de  $\lambda_0$  adotado neste trabalho foi de 1,7, e o de  $\beta_0$  foi -0,7,  $\alpha$  é a assimetria entre a influência na morte e na reprodução,  $\alpha$  é o parâmetro de saturação, e  $\sum_{\square'} \chi(\square')$  é o número de indivíduos que estão em uma distância menor que  $R$  da partícula  $\square$  (excluindo a partícula  $\square$ ).

No modelo determinístico, a teoria do campo médio é usada para simplificar as interações de indivíduos em um sistema complexo. Ela substitui as diferentes probabilidades que cada indivíduo tem de realizar alguma interação, por médias destas probabilidades [3]. No algoritmo que está se usando neste trabalho, cada indivíduo movimenta-se, e tem uma probabilidade de morrer, ou reproduzir-se. Utilizando-se da teoria do campo médio, a seguinte equação é adquirida para seguir o algoritmo:

$$\partial_t \chi(\square, t) = \nabla^2 \chi(\square, t) + (\lambda_0 - \beta_0) \chi(\square, t) - \frac{1}{\alpha} \chi(\square, t) \int_{|\square - \square'| < R} \chi(\square', t) d^2 \square'.$$

em que  $\chi(\square, t)$  é a partícula  $x$  no tempo  $t$ .  $\nabla^2$  é o termo difusivo, indicando para onde a partícula irá se mover.  $(\lambda_0 - \beta_0)$  é a diferença entre a taxa de natalidade e mortalidade, também podendo ser chamada de  $\mu$ .  $\int_{|\square - \square'| < R} \chi(\square', t) d^2 \square'$  são os indivíduos envolta do indivíduo  $x$ , em um raio  $R$ .  $\alpha$  é o parâmetro de saturação.

O método de Runge-Kutta é um método que fornece uma solução numérica aproximada de equações diferenciais ordinárias que não possuem soluções analíticas. Ele baseia-se na manipulação de um polinômio de Taylor, condizente com a ordem do método, que fornece inclinações de um ponto  $n$ , tais inclinações são usadas em uma soma ponderada para encontrar o ponto  $n+1$ . Neste trabalho, devido à sua alta precisão [4], usou-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, ou seja, foram usadas 4 inclinações para encontrar  $n+1$ .

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com os resultados, obteve-se as imagens da formação dos *clusters*, como as da Figura 1. No método estocástico, usou-se os seguintes parâmetros:  $\rho = 0,1$ ,  $\alpha = -1$ ,  $\rho_{\square} = 200$ ,  $\lambda_0 = 1,7$ , e  $\beta_0 = -0,7$ . E, no determinístico foram:  $\mu = 0,7$ ,  $\rho_{\square} = 50$ , e  $\rho = 0,1$ . Os valores destes parâmetros são os mesmos usados no artigo[2], como o objetivo deste trabalho é refazer tal artigo, usou-se as mesmas variáveis.

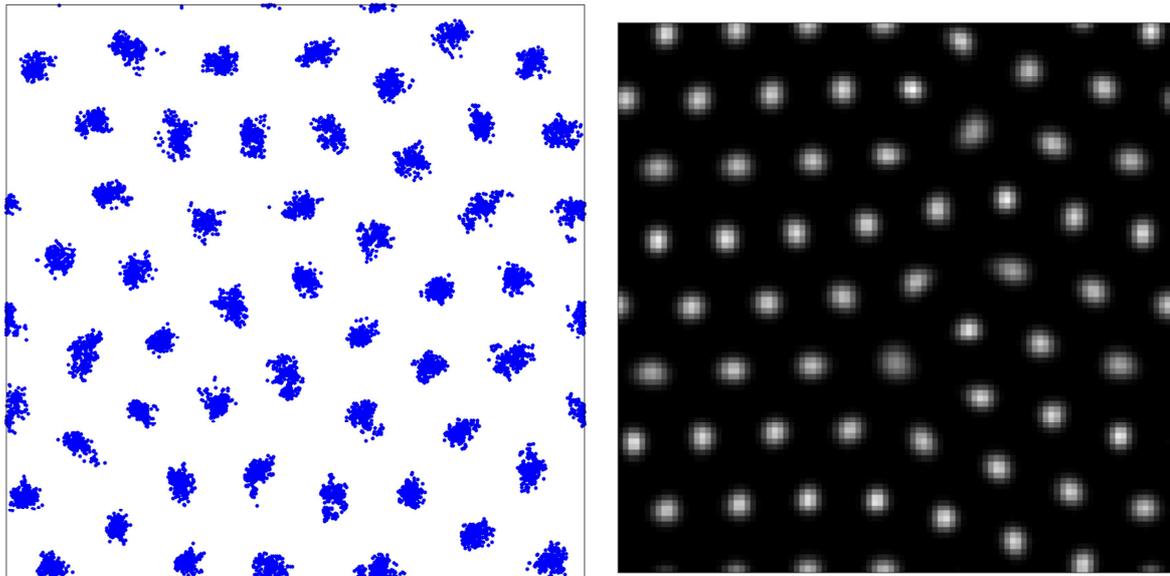


Figura 1 – Estocástico à esquerda, e determinístico à direita.

Notou-se que em ambos os métodos os clusters não sumiram após serem formados. No método determinístico os clusters mantiveram os mesmos formatos, e apenas se moveram com o tempo. No método estocástico os clusters mudaram de forma ao longo do tempo, o que era esperado, visto que as probabilidades de reprodução e morte dependem dos indivíduos ao redor.

O código desenvolvido pode ser encontrado no github [5].

## CONCLUSÕES

Ao seguir os mesmos métodos, e utilizando os mesmos parâmetros do artigo, chegou-se aos mesmos resultados. Isto reforça a confiabilidade do artigo replicado, bem como seus resultados. Conclui-se que os clusters são formados quando os indivíduos não se movem muito, junto com uma taxa de reprodução maior que a de morte, ou seja, os indivíduos nascem, reproduzem-se, e morrem antes de se moverem longe o suficiente para os clusters se desfazerem.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por tudo. Ao meu orientador Prof. Breno Ferraz de Oliveira pela orientação, e sobretudo paciência, muita paciência. Agradeço também

à UEM e PPG pela oportunidade. Aos meus amigos João Pedro, Jullia Lima e Maria Carolina por todo apoio direto e indireto. E, por último, mas não menos importante, à minha família, por todo apoio que me deram, especialmente à minha irmã Andriely.

## REFERÊNCIAS

- [1] DANTAS, J. F. D. L. **Integração por Aproximação: Simulação Via Monte Carlo**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Cuité, 2016. Disponível em: <http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/xmlui/bitstream/handle/riufcg/8094/JANA%c3%8dNA%20FABIANA%20DE%20LIMA%20DANTAS%20-%20TCC%20LICENCIATURA%20EM%20MATEM%c3%81TICA%20CES%20%20016.pdf?sequence=3&isAllowed=y>. Acesso em: 27 ago. 2023.
- [2] HERNÁNDEZ-GARCÍA, L; López C. *Clustering, advection, and patterns in a model of population dynamics with neighborhood-dependent rates*. Physical Review E, **70**, 016216 (2004).
- [3] CARO, W. E. F. **Análise preditiva de desempenho de workflows usando Teoria do Campo Médio**. 2017. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: [https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45134/tde-17062017-020319/publico/tese\\_mestrado\\_waldir.pdf](https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45134/tde-17062017-020319/publico/tese_mestrado_waldir.pdf). Acesso em: 27 ago. 2023.
- [4] VALLE, K. N. F. **Métodos Numéricos de Euler e Runge-Kutta**. 2012. Monografia (Especialização em Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/48530/1/Metodos%20de%20Euler%20e%20Runge%20Kutta.pdf>. Acesso em: 27 ago. 2023.
- [5] Disponível em: <https://github.com/ak0237/PIC>. Acesso em: 27 ago. 2023.