QUADRADO DE CÍRCULOS

Vitoria Vendramini Gongora (PIC/UEM), Rodrigo Martins (Orientador). E-mail: ra114100@uem.br, rmartins@uem.br

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra /Matemática

Palavras-chave: Geometria Euclidiana; Euclidea; Métricas

RESUMO

O problema que introduziu essa iniciação cientifica foi: “podemos construir um quadrado a partir de um segmento de reta usando apenas circunferências?”. Considerando apenas o espaço Euclidiano com a métrica usual, o problema pode ser resolvido, porém, não consta da pergunta se este é o contexto da resposta, coisa muito importante da matemática. Nosso objetivo é estudar as definições de cada elemento utilizado no problema e analisar algumas possibilidades de espaços e possíveis definições alternativas para o problema, esperando obter a solução usual e algumas possíveis soluções desse problema nesses novos meios.

INTRODUÇÃO

Para responder: pode-se construir um quadrado a partir de um segmento de reta usando apenas circunferências? Com as circunferências definidas como o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto chamado centro, a maneira mais óbvia de se pensar é no plano Euclidiano com a métrica usual e tentar usar as técnicas de régua e compasso, da geometria descritiva. Porém, ao se deparar com o problema, de fato, surgem inúmeras questões que devem ser vistas, a partir da própria pergunta, como: “o que é um quadrado?”, "O que é, de fato, uma circunferência?”, “Se circunferência depende de distância o que acontece se trocar a métrica?”, ”E se trocar o espaço?”, Questões estas que não estão claras na pergunta e que podem fazer toda diferença quando se pretende resolver um problema matemático.
A pergunta em questão é apresentada no jogo Euclidea, desenvolvido por Horis International Limited, contendo 120 fases, divididas em 15 etapas, nomeadas pelo alfabeto grego (de alpha a omicron) com desafios que devem ser cumpridos utilizando apenas régua e compasso.
Em matemática, para solucionar um problema novas perguntas podem surgir, então neste trabalho foram exploradas perguntas como as já citadas, mostrando a importância de se trabalhar com definições e como o espaço em que o problema está inserido influencia diretamente em sua solução, ou na inexistência dela.

MATERIAIS E MÉTODOS

Incialmente, selecionamos alguns textos para auxilio posterior. Baseados no livro Geometria Plana e Espacial de João R. Gerônimo e Valdeni S. Franco (2010), foi possível construir e demonstrar a solução da pergunta no Espaço Euclidiano com a Métrica Euclidiana.
A partir desse momento, começamos a aprofundar os estudos em o que seria exatamente cada palavra da pergunta em questão, como: “o que é um quadrado?”, ”o que é um segmento de reta?”, “o que é uma circunferência?”,” se circunferência depende de distância, o que é distância?”. Para o auxílio nas respostas dessas perguntas utilizamos os livros Fundamentos da Matemática Elementar de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo (2013) e Espaços Métricos de Elon Lages Lima (1993).
Por fim questionamos a possibilidade de mudar o espaço para um não Euclidiano, mas para isso, precisaríamos novamente trabalhar com a definição dos elementos nesse novo meio, assim utilizamos a dissertação de mestrado de Silva, orientado pela professora doutora Alice K. M. Libardi defendida em 2015.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O primeiro resultado esperado de nossa pesquisa foi a construção e demonstração do problema no Espaço Euclidiano com a Métrica Euclidiana:
Construção:
I) Dados os pontos A e B trace uma circunferência c_1 centrada em A e de raio AB e circunferência c_2 centrada em B com raio BA. Marque os pontos C e D sendo as interseções de c_1 e c_2. Trace a reta m que passa pelos pontos C e D.
II) Trace a circunferência c_3 centrada em C e com raio CD. Marque o pontos E sendo a interseção de c_1 e c_3, e o ponto F sendo a interseção c_2 e c_3.
III)Trace a circunferência c_4 centrada em E e de raio EB e a circunferência c_5 centrada em F com raio F A. Marque o ponto G sendo a interseção de c_4 e c_5.
IV)Trace a circunferência c_6 centrada em B com raio BG e a circunferência c_7 centrada em A de raio AG. Marque o ponto H sendo a interseção de c_1 e c_6 e o ponto I sendo a interseção de c_2 e c_7.

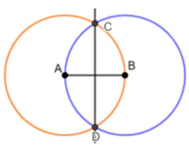


Figura 1 – Ilustração da construção I.

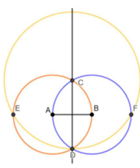
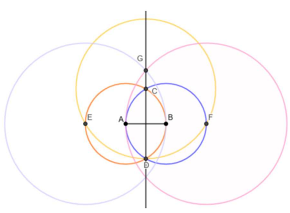


Figura 2 – Ilustração da construção II.



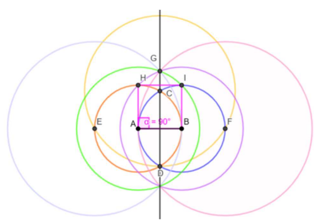


Figura 3 – Ilustração da construção III. **Figura 4** – Ilustração da construção IV.

Demonstração:

I) Note que os pontos C e D equidistam de A e B por serem a interseção das circunferências c_1 e c_2 e que m é a mediatriz do segmento AB. Além disso, as distâncias EA e BF são iguais pois os triângulos ECA e F CB são congruentes, já que AC ≡ BC e CE ≡ CF (por serem raios de c_3). Com efeto tem-se que EA ≡ AB ≡ BF já que são raios das circunferências c_1 e c_2.

II) Ainda tem-se que AG ≡ BG pela congruência dos triângulos EAG e F BG, (como EB ≡ EF e EG ≡ F G as circunferências c_4 e c_5 são congruentes, e sendo G a interseção dessas EG ≡ F G).

III) Veja que AH ≡ AB e B ≡ AB por H e I serem construídos pela interseção de c_1 e c_6 e c_2 e c_7 respectivamente, logo estão em c_1 e c_2 que possuem raios AB.

IV) Por fim, perceba que as circunferências c_6 e c_7 são congruentes por possuírem raios AG e BG que são segmentos iguais, assim, os triângulos BAH e BIH são congruentes pois HB é um lado em comum e como visto, HA ≡ IB, portanto AB ≡ HI.

Em suma tem-se que BA ≡ AH ≡ HI ≡ IB e, portanto, o polígono ABIH é um losango. Para mostrar que é um quadrado falta provar que os ângulos internos são de 90°. Temos que esse fato é verdadeiro pois, ao analisar as construções em relação a reta m existe simetria entre os dois lados e consequentemente entre os 4 ângulos.

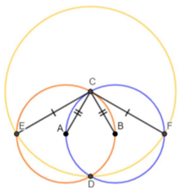


Figura 5 – Ilustração da demonstração I.

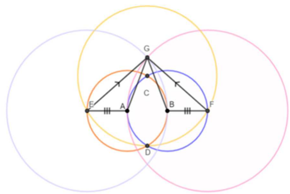


Figura 6 – Ilustração da demonstração II.

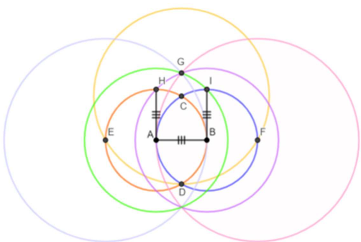


Figura 7 – Ilustração da demonstração III.

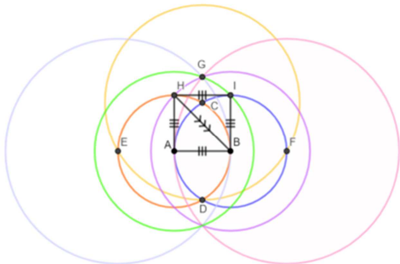


Figura 8 – Ilustração da demonstração IV.

■

Terminada essa solução estudamos outras noções de circunferências (como a fronteira de bolas para outras métricas) e percebemos que o problema não poderia ser solucionado em todas as métricas, como na Métrica do Supremo no Espaço Euclidiano, já que não seria possível construir um quadrado, ou mesmo dar significado ao que seria um; já em outros casos a própria circunferência já seria um quadrado, um exemplo é considerando o Espaço Euclidiano com a Métrica do Máximo. Nele, com a definição de circunferência como o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um centro temos: seja $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}$ então a circunferência corresponde ao $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ tal que

$d''(a,x) = \max\{d(a_1,x_1), d(a_2,x_2)\}$. Geometricamente foi demonstrado que a circunferência se apresenta na seguinte forma:

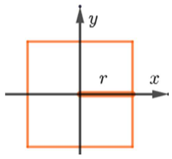


Figura 9 – Ilustração circunferência na métrica do máximo.

O que para nosso proposito confunde bastante o que seria o quadrado e a circunferência deixando impossível de se resolver o problema.

CONCLUSÕES

Como vimos, algo que parece óbvio em matemática nem sempre é. Um simples problema, que a princípio parece de Geometria Euclidiana, pode conter muitos problemas escondidos quando voltamos aos fundamentos da questão. Um círculo em matemática pode esconder muita teoria que não vemos, por exemplo o mundo em que está definido, a definição que depende de uma distância. A frase distância entre pontos, em matemática, precisa de um contexto muito exato, pois pontos podem ser interpretados como elementos de um conjunto, como no conjunto de funções e neste caso a distância entre pontos nos leva a uma definição completamente diferente do que seria senso comum de uma circunferência. Portanto ao se deparar com um problema de matemática precisa-se antes de tudo estabelecer o contexto e as premissas com as quais se procede por inferências lógicas a possíveis respostas

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Universidade Estadual de Maringá, ao Departamento de Matemática e ao meu orientador Professor Doutor Rodrigo Martins. Também não posso deixar de agradecer a minha família e aos meus amigos pelo apoio intelectual e motivacional.

REFERÊNCIAS

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Espacial: posição e métrica.. 5. ed. São Paulo: Atual, 2013. 440 p.

GERÔNIMO, J. R.; FRANCO, V. S. **Geometria Plana e Espacial**: um estudo axiomático. 2. ed. Maringá: Eduem, 2010. 320 p.

LIMA, E. L. **Espaços métricos.** 3°ed. Rio de Janeiro: Euclides, 1993. 299 p.

SILVA, W. D. **Uma introdução à Geometria Esférica.** Orientador: Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi. 49 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2015.