VARIEDADES TÓRICAS AFINS – UMA ABORDAGEM ALGÉBRICA

Emanuel de Souza Jordão (PIC/UEM), Maria Elenice Rodrigues Hernandes (Orientadora). E-mail: merhernandes@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

Matemática/Geometria Algébrica

Palavras-chave: Variedades tóricas; geometria convexa; semigrupo.

RESUMO

O presente trabalho discursa sobre as variedades tóricas afins, destacando os principais conceitos e teoremas envolvidos nessa área da matemática. A metodologia consistiu de pesquisa de materiais bibliográficos relacionados ao tema de estudo. Inicialmente, concentrou-se em estabelecer os fundamentos necessários, como ideais, anéis noetherianos e o Teorema da Base de Hilbert. A geometria algébrica é explorada, com ênfase nas variedades algébricas afins e a importância do Teorema de Nullstellensatz. Explorou-se, também, a geometria convexa, incluindo a construção de cones, cones duais e faces, que são conceitos necessários para a construção de variedades tóricas. Também foi abordado monoides e polinômios de Laurent. Finalmente, estudou-se as variedades tóricas afins, discutindo resultados e exemplos específicos. Além disso, são descritas as superfícies tóricas, que são variedades tóricas de dimensão 2, com destaque para a combinação de conceitos combinatórios associados aos cones σ □ R^2. Do estudo realizado conclui-se que as variedades tóricas afins são objetos importantes na matemática, especialmente na geometria algébrica. Essas variedades são essenciais para a análise de sistemas representados por C-álgebras monomiais geradas por polinômios de Laurent, que estão relacionadas a cones grade e fortemente convexos. O estudo dessas variedades envolve a combinação de conceitos de álgebra, geometria convexa e geometria algébrica, sendo fundamental para a análise de propriedades geométricas e topológicas dessas estruturas matemáticas.

INTRODUÇÃO

As variedades tóricas afins representam uma classe de objetos na geometria algébrica. Diversos trabalhos abordam essa classe de variedades. Destacamos dois livros que abordam este tema e que são referências clássicas para introduzir os principais conceitos e resultados neste assunto, que são o livro do Jean P. Brasselet (2004) e David A. Cox, John J. Little e Hal K. Schenck (2011). Na segunda referência apresenta-se o conceito de variedades tóricas definidas a partir de um

ideal primo que é binomial. Nós vamos considerar a definição clássica de variedades tóricas ditas normais.
Além de sua importância teórica, essas variedades têm aplicações em diversas áreas da matemática, como a geometria algébrica, em que desempenham um papel crucial na classificação de variedades algébricas e na compreensão de suas singularidades. Na combinatória, as variedades tóricas afins estão relacionadas a questões sobre poliedros, grafos e álgebra linear.
Nesse sentido, o presente projeto visou estudar as variedades tóricas afins. Para tanto, foram necessários introduzir diversos conceitos de álgebra básica, retomando conceitos estudados na graduação e conceitos da geometria algébrica, que foram novos para o acadêmico. Depois, exploraram-se resultados em geometria convexa, em particular, sobre monoides e polinômios de Laurent, conceitos estes que permitiram a construção das variedades citadas.

REVISÃO DE LITERATURA

Em se tratando de um projeto de iniciação científica em matemática pura, a metodologia utilizada consistiu essencialmente de pesquisa de materiais bibliográficos relacionados ao tema de estudo e confecção de exemplos utilizando algum software matemático. As referências SERRANO (2021) e SHARP (2000) foram essenciais para o estudo dos preliminares de álgebra comutativa e de geometria algébrica necessários para a compreensão dos resultados principais. Em SHARP (2000) apresenta-se uma abordagem geral da álgebra comutativa. Em SERRANO (2021) os preliminares de álgebra comutativa e geometria algébrica são direcionados para o objetivo do trabalho estudado, por exemplo, são apresentados os conceitos de ideal, variedade algébrica e noções básicas da geometria convexa, como o de cone poliedral, cone dual e face. A referência SERRANO (2021) foi a principal para este trabalho. Nela exploramos os conceitos de semigrupo para atingir nosso objetivo que era o estudo das variedades tóricas afins. Utilizamos algumas referências suplementares para o estudo destas variedades como ALVES (2016), BRASSELET (2004) e COX, LITTLE e SCHENCK (2011). Esses materiais serviram de suporte para a confecção de exemplos, bem como para abordar o mesmo tema sob outras perspectivas. Para obtermos uma representação geométrica dos cones poliedrais e faces em nossos exemplos, utilizamos o Software *Geogebra*.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Cada capítulo estudado teve como foco atingir o objetivo principal do trabalho que foi apresentar o conceito de variedades tóricas afins. Nesse sentido, estudou-se alguns conceitos e resultados fundamentais da álgebra, como ideais e suas características, além de anéis noetherianos e suas propriedades. Do mesmo modo, apresentamos o Teorema da Base de Hilbert, essencial para o estudo dos objetos em questão.

Também no campo da geometria algébrica, estudou-se como foco principal as variedades algébricas afins, discutindo, em particular, o teorema de Nullstellensatz.
Alguns conceitos da geometria convexa foram estudados, como os cones, cones duais e faces, fundamentais para a construção de variedades tóricas, que representam o espectro maximal de um anel de coordenadas gerado a partir da combinação de cones. Somado a isso, explorou-se os conceitos de monoides e polinômios de Laurent. Mais especificamente, definiu-se o conceito de semigrupo, que é um monoide finitamente gerado por meio de uma combinatória do cone e do seu dual. Posteriormente, foi definido a C-álgebra finitamente gerada R a qual é produzida pelos geradores do semigrupo. Com isso, uma variedade tórica afim associada a um dado cone foi definido como sendo o espectro maximal de R.

Finalmente, estudou-se o conceito de variedades tóricas afins e discutiu-se resultados e exemplos desse tipo de variedades. Além disso, descreveu-se a classe das superfícies tóricas, ou seja, as variedades tóricas de dimensão 2, utilizando a combinatória associada aos cones σ □ R^2. Para tanto, foi necessário introduzir o conceito de quasimatriz e quasimenores, que se assemelham aos clássicos objetos da álgebra linear: matrizes e menores de uma matriz.

CONCLUSÕES

Concluiu-se que as variedades tóricas afins desempenham um papel fundamental na matemática, especialmente na geometria algébrica. Elas representam o espectro maximal de uma C-álgebra monomial gerada por polinômios de Laurent, que, por sua vez, está ligada a cones grade e fortemente convexos. Essas variedades são objetos matemáticos complexos, cujo estudo envolve a combinação de conceitos de álgebra, geometria convexa e geometria algébrica. Compreender as variedades tóricas afins é essencial para a análise de propriedades geométricas e topológicas de sistemas representados por essas estruturas matemáticas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora, Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes por me introduzir à pesquisa em Matemática.

REFERÊNCIAS

ALVES, D. K. M. **Variedade tórica**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2016.

BRASSELET, J. -P. **Introduction to toric varieties**. Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

COX, D. A., LITTLE, J. B., SCHENCK, H. K. **Toric Varieties**. Graduate Studies in Mathematics, 124, American Mathematical Sociey, 2011.

SERRANO, N. P. P. **Introdução às variedades tóricas afins**. Trabalho de Conclusão do Curso B. (Bacharelado em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2021.

SHARP, R. Y., **Steps in Commutative Algebra**. Second Edition. London Mathematical Society. Student Texts, 51, 2000.