DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES E SUA APLICAÇÃO EM ALGORITMOS DE RECOMENDAÇÃO

Mariana Maronezzi Brezovsky (PIC/UEM), Francisco Nogueira Calmon Sobral (Orientador). E-mail: fncsobral@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

Matemática Aplicada/ Análise Numérica

Palavras-chave: Algoritmos de recomendação; Filtragem colaborativa; Matrizes.

RESUMO

Algoritmos de recomendação, inteligência artificial e aprendizagem computacional são termos populares hoje em dia. Por trás de cada técnica há diversas ferramentas matemáticas e computacionais. Neste projeto, estudaremos em detalhes o papel da decomposição em valores singulares em algoritmos de recomendação baseados em filtragem colaborativa. Tais algoritmos são amplamente utilizados em sites de notícias, filmes e músicas. Iremos implementar a decomposição e estudar suas propriedades com o objetivo de compreender as suas vantagens e desvantagens ao ser usada como ferramenta de recomendação.

INTRODUÇÃO

A decomposição (ou fatoração) em valores singulares (SVD - *Singular Value Decomposition*) assegura que dada uma matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ podemos encontrar $U \in \mathbf{R}^{m\times m}$ e $V \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ortonormais e $\Sigma \in \mathbf{R}^{m\times n}$ tais que $A = U\Sigma V^T$. A matriz Σ possui em sua diagonal principal os *valores singulares* de □ em ordem decrescente, sendo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \cdots \geq \sigma_p > 0$, com $p \leq min\{m, n\}$o posto de □, e demais entradas nulas. Devido a esta estruturação, a SVD é utilizada como base de diversas técnicas de compressão de imagens, redução de dimensionalidade e identificação de características relevantes em análise de dados.

Neste sentido, apresentaremos os aspectos teóricos e geométricos da SVD, com o objetivo de compreender as vantagens e desvantagens do uso dessa técnica. Estudaremos os fundamentos teóricos para a existência e o cálculo da SVD assim como suas propriedades geométricas e as informações que podem ser obtidas sobre a matriz. Em especial, verificaremos que a decomposição fornece o posto da matriz em questão e apresenta as colunas das matrizes □ e □ como bases ortonormais para $\mathbf{R}^m$ e $\mathbf{R}^n$, respectivamente. Com a implementação computacional exploraremos suas vantagens e desvantagens e tentaremos resolver alguns problemas conhecidos. Uma atenção especial será dada ao efeito bolha dessa técnica.

MATERIAIS E MÉTODOS

A metodologia utilizada será o estudo teórico-prático de (GOLUB, 1996), (KALMAN, 2002) e (STRANG, 2019). Ambos possuem um enfoque teórico e geométrico na SVD. A teoria será estudada e exemplificada de forma a mostrar suas vantagens e desvantagens as implementações numéricas serão feitas na linguagem Julia que é adequada para a matemática computacional.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para construção da SVD, podemos escolher uma base ortonormal $\{v_1, v_2, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ para $\mathbb{R}^n$, em que □ é o posto de □. Tome o conjunto l.i. de vetores $v_1, v_2, \cdots, v_k$ que geram o espaço linha de □ e o restante dos □ – □ elementos do núcleo de □. Desse modo teremos a base desejada. E, de fato, completando a base com vetores l.i. do núcleo teremos uma base ortonormal.

Seja □□, $t = k+1, \cdots, n$ elementos do núcleo de □. Por definição de base, considere:

$$A_i^t = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k, \quad \forall i = 1, \cdots, m$$

Logo,

$$< A_i^t, v_t >= (A_i^t)^t \cdot v_t = (\alpha_1 v_1^t v_t + \alpha_2 v_2^t v_t + \cdots + \alpha_k v_k^t v_t) = 0$$

Agora, devemos definir □□ como o vetor unitário paralelo a Av_i, com os $v's$ ortonormais entre si,

$$u_i = \alpha_i A v_i, \quad i = 1, \cdots, k$$

e com isso gerar uma base □ para $\mathbb{R}^m$ (imagem de A). Queremos que que □ seja ortonormal, ou seja,

$$u_j^t u_i = 0 \text{ e } u_j^t u_j = 1$$

Desse modo,

$$u_j^t u_i = \alpha_i (\alpha_j v j^t A^t) A v_i$$

Assumindo $A^t A v_i = \lambda_i v_i$ (v_i como autovetor de $A^t A$ associado ao autovalor λ_i)

$$= \alpha_i \alpha_j v j^t \lambda_i v_i$$
$$= \alpha_i \alpha_j \lambda_i v j^t v_i$$
$$= 0$$

Logo, $u_j^t u_i = 0$, como desejado. Agora, verifiquemos a condição necessária para que $u_j^t u_j = 1$.

$$u_j^t u_j = \alpha_j^2 v_j^t A^t A v_j$$
$$= \alpha_j^2 v_j^t \lambda_j v_j$$
$$= \alpha_j^2 \lambda_j v_j^t v_j$$

Sendo $||v_j|| = 1$

$$u_j^t u_j = \alpha_j^2 \lambda_j$$

Assim, para que os vetores □′□ tenham norma *1*, devemos ter

$$\alpha_j^2 \lambda_j = 1 \Leftrightarrow \alpha_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}$$

Com isso,

$$u_j = \alpha_j A v_j \Rightarrow u_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} A v_j \quad 1 \leq j \leq k$$

Desse modo, conseguimos desenvolver todas as entradas de □, □, □ para fatoração SVD de uma matriz □□×□.

Por outro lado, podemos considerar uma matriz com valores faltantes e, neste caso, teremos um problema de otimização para resolver. Dado □□ = □, buscamos □ ∈ □□□□{□*1*, ⋯ , □□ } em $\mathbb{R}^m$, mais próximo de □. Isto é:

□□□□ ∈□□ ||□′□ − □||²₂ ⇒ □′□ = □ ⇒ □′□ □′□ = □′□ □ ⇒ □ = □′□ □

Daí, □′(□′□ □) será a projeção de □ na imagem de □.

Em um contexto de recomendação, mapeamos os fatores latentes que envolvem a interação item-usuário em sistemas baseados em filtragem colaborativa. Isto é, se os itens são filmes, os fatores podem medir o quanto um filme se caracteriza como drama ou comédia, qual o público alvo, entre outras características que são indefiníveis.

Neste sentido, cada item □ está associado a um vetor □□ ∈ □□ e cada usuário □ associado a um vetor □□ ∈ □□. Então, ao fazer o produto interno □□□ □□ , obtemos a interação do usuário □ com relação ao item □, de modo que a recomendação para essa interação □̂□□ deve ser o mais fiel possível, ou seja, devemos resolver o seguinte problema de otimização:

□□□□(□,□)(□̂□□ − □□□ □□)²

Essa minimização pode ser obtida a partir da SVD, ao considerar:

□□□□ = ∑ (de □=*1* até □) □□□□□□□

Fixando uma linha □ e uma coluna □:

□□□ = ∑ (de □=*1* até □) □□[□□]□[□□□]□

E, assim, basta considerar □□□ = □□[□□]□ e □□ = [□□□]□ para obtermos a recomendação.

CONCLUSÕES

Foi possível concluir que a decomposição em valores singulares permite identificar as entradas de maior importância em uma matriz, de modo a reduzir sua dimensionalidade. Além disso, no âmbito da recomendação, a fatoração evidenciou relações ocultas entre usuários e itens, as quais permitem sugestões para novos itens. Foi implementada em Julia uma versão simplificada para lidar com as informações faltantes, o que permitiu compreender como as recomendações são feitas nestes sistemas.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha sincera gratidão ao orientador Francisco Nogueira Calmon Sobral, e à nossa estimada universidade, UEM, pelo ambiente propício ao desenvolvimento do projeto.

REFERÊNCIAS

GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F. **Matrix computations**. 3rd. [S.l.]: The Johns Hopkins University Press, 1996.

KALMAN, Dan. **A Singularly Valuable Decomposition:** The SVD of a Matrix. The College Mathematics Journal, Informa UK Limited, v. 27, n. 1, p. 2–23, 1996. doi: 10.1080/07468342.1996.11973744.

STRANG,G. **Linear algebra and learning from data.** [S.l.]: Wellesley-Cambridge Press Cambridge, 2019. isbn 978-069219638-0.