

Introdução a sistemas de controle e dinâmica quântica

Nicolas Da Silva Fernandes (PIC/UEM), Gabriel Henrique Bandeira (coautor),
Eduardo Celso Viscovini (Coorientador), Alexandre Jose Santana (Orientador).
E-mail: ra128673@uem.br

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática, Maringá, PR.

Área e subárea do conhecimento: Matemática, Geometria/Topologia

Palavras-chave: ÁLGEBRAS DE LIE, GRUPOS DE LIE, SISTEMAS DINÂMICOS

RESUMO

Neste trabalho visamos estudar sistemas de controle, mas especificamente sistemas quânticos, de um ponto de vista introdutório. O estudo de álgebras Lie, grupos de Lie e controlabilidade são vitais para o entendimento de tais sistemas.

INTRODUÇÃO

A teoria de controlabilidade é um campo da matemática pura e aplicada, e de grande interesse para outras áreas tais como física, engenharias, robótica e economia, que se concentra na análise de sistemas de controle, que são sistemas que permitem que uma entrada influencie o comportamento do sistema. Neste trabalho, usamos a teoria de Lie para estudar condições necessárias e suficientes para a controlabilidade do sistema de controle quântico estudado, para isso foi necessário, como pré requisito, revisamos conceitos de álgebra linear, topologia básica, álgebras de Lie e grupos de Lie, nesta revisão os livros mais usados foram [2], [3] e [4].

MATERIAIS E MÉTODOS

Os materiais usados foram os canônicos na matemática pura e física teórica. Especificamente, salas de seminário, lousa, giz, marcadores, papel, computador, impressora, livros, etc. Os métodos utilizados também foram os usuais nesta área, discussões com os orientadores seminários, revisões bibliográficas etc.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O principal objetivo específico foi estudar o Capítulo 3 da referência [1], ou seja, as condições necessárias e suficientes para a controlabilidade dos sistemas do tipo:

$$\dot{X} = H_0(v)X + \sum_{k=1}^m v_k H_k X, \quad X(0) = \mathbf{1}_{n \times n} \quad (1)$$

Figura 1: Sistema de controle estudado

Mais especificamente, mostramos que o conjunto dos pontos atingíveis pelo sistema, a partir da origem, é denso no grupo de Lie conexo e^L onde L é a álgebra de Lie gerada pelos campos H_i do sistema (1). E mais mostramos que se e^L é um subgrupo mergulhado de $U(n)$ então o conjunto dos pontos atingíveis a partir da identidade é o próprio e^L .

Para demonstração desse teorema foi dividido em algumas partes, afim de mostrar que o conjunto dos estados alcançáveis é de fato denso, primeiro foi mostrado que o conjunto dos estados alcançáveis é denso sobre o conjunto e^L , utilizando a ideia de densidade vindo da topologia. Segunda parte da demonstração foi feita a parte da geração finita, cujo a ideia principal é mostrar que qualquer elemento de e^L pode ser escrito como o produto finito de matrizes da forma e^{At} sendo $A \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ sendo um conjunto finito e t pertencendo ao conjunto dos estados alcançáveis a partir disso temos um importante resultado aonde o colchete entre elementos do conjunto A gera todos os elementos da álgebra no sentido de Lie.

Última parte da demonstração do teorema foi mostrado que o conjunto dos estados alcançáveis contém uma vizinhança aberta na identidade, se isso não for garantido não é possível afirmar que o conjunto dos estados alcançáveis é igual e^L já que a álgebra induzida L só possível na região da identidade.

CONCLUSÕES

Como resultado do teorema provado podemos concluir que o conjunto dos estados alcançáveis obtido pela equação dinâmica quântica, dada as condições das matrizes

que compõe o sistema, é controlável. A partir desse resultado obtemos as condições e para um sistema dinâmico quântico ser dito controlável.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade Estadual de Maringá e ao Departamento de Matemática pela oportunidade de estudar e aprender mais sobre as áreas de matemática pura, aplicada e física teórica. Agradeço em especial, ao orientador Alexandre Santana e ao coorientador Eduardo Celso pelo auxílio na jornada, e também ao meu colaborador Gabriel Bandeira pela oportunidade.

REFERÊNCIAS

- [1] Domenico, D. **Introduction to Quantum Control and Dynamics**: Routledge; 2nd edition (July 29, 2021)
- [2] San Martin, L.A.B. **Grupos de Lie**: Editora UNICAMP (2016)
- [3] San Martin, L.A.B. **Álgebras de Lie**: Editora UNICAMP (1999)
- [4] Carlos, J.B. e Santana A.J. **Estruturas algébricas com ênfase em elementos da teoria de Lie**: Editora UEM (2011)