FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA TENSORIAL E ANÁLISE NA RETA

Ian Capél Vendramin (PIC/UEM), Ryuichi Fukuoka (Orientador). E-mail: ra129466@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Maringá, PR.

Área e subárea do conhecimento: Matemática/Geometria e Topologia /Geometria Diferencial.

Palavras-chave: Tensores, Álgebra Multilinear, Geometria Riemanniana, Análise Real.

RESUMO

Este projeto é a primeira etapa no estudo de pré-requisitos em Matemática que são necessários para a geometria Riemanniana. Além do interesse do tema em si, este projeto faz parte da formação complementar do aluno, para eventualmente ser aplicado em Física teórica. O formalismo matemático conforme visto pelos matemáticos, apesar de não ser indispensável para a formação em Física, é bastante útil para diversas áreas de conhecimento, inclusive para áreas aplicadas. Neste projeto, o aluno estudou métodos que ajudam a investigação de objetos matemáticos através do estudo da teoria e de exemplos instrutivos, são eles: a álgebra tensorial e a análise real.

INTRODUÇÃO

Este projeto está dividido em duas partes: a primeira parte trata de fundamentos de álgebra linear e multilinear, com foco em álgebra tensorial. A segunda parte trata de tópicos de análise na reta. A geometria Riemanniana é uma área da geometria diferencial, ou seja, que usa cálculo diferencial e integral como ferramenta. Seu formalismo é essencialmente o mesmo daquele usado na teoria geral da relatividade de Einstein, área de extrema importância na física teórica. A ligação entre os dois tópicos que constituem o projeto é que o cálculo diferencial se caracteriza por estudar aplicações cuja variação é bem aproximada por aplicações lineares e multilineares, e os mesmos são pré-requisitos para o estudo da geometria

Riemanniana. Por fim, a geometria Riemanniana é a geometria referência para outros tipos de geometria, tais como geometria de Finsler, sub-Riemanniana, Finsler de classe C0 entre outras. As duas partes do projeto foram estudadas de maneira criteriosa e vistas com o mesmo rigor que se vê em um curso de Matemática.

REVISÃO DE LITERATURA

Primeiramente foram abordados os temas relacionados à álgebra linear e à teoria de operadores lineares e bilineares em espaços vetoriais com produto interno. A bibliografia para esta primeira parte é Coelho (2001). Seguimos então para o estudo da álgebra multilinear focando no estudo dos tensores definidos em espaços vetoriais. Entre os tópicos, vimos o produto tensorial, o operador traço, e os operadores musicais bemol e sustenido. A bibliografia para a teoria geral de tensores é Lee (2013). Finalmente, foram estudados tópicos de análise real e topologia na reta: completude dos números reais, conjuntos abertos e fechados na reta real, limites de sequências e funções, continuidade, finalizando esta parte com o estudo da derivada. A referência para o estudo da análise real é Lima (2009).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Em Coelho (2001), foram estudados os seguintes assuntos: Considere que V e W são espaços vetoriais sobre R ou C com dimensão finita. Iniciamos o estudo a partir dos espaços dual V* e bidual V** de V, bem como o isomorfismo natural entre V e V**. Dada uma transformação linear $T: V \to W$, foi estudado a sua transposta $T^t : W^* \to V^*$. Considere V e W munidos com produtos internos. Foram definidos os isomorfismos entre esses espaços. A teoria de operadores lineares definidos em V cujas propriedades estão relacionadas ao produto interno, tais como os operadores adjuntos, auto-adjuntos, unitários e normais também foram vistos. Também foi apresentada a teoria de formas bilineares, em especial as formas bilineares simétricas.

Em Lee (2013), foi estudado a teoria dos operadores multilineares em espaços vetoriais, com ênfase na teoria de tensores definidos em espaços vetoriais: o produto tensorial, o operador traço e sua representação em relação a uma base. Além disso, foi visto a teoria de tensores em um espaço vetorial munido com um produto interno e os operadores musicais bemol e sustenido que identificam não só V e V*, mas também outros tipos de tensores.

Em Lima (2009), o estudo foi iniciado com a completude dos números reais. Em sequência, foram estudadas algumas noções topológicas em R como conjunto aberto, fechado e pontos de acumulação, as quais serão importantes para o estudo de limite e continuidade. O projeto foi finalizado com o estudo da derivada. Os tópicos vistos foram estudados de maneira aprofundada, com o mesmo rigor visto nos cursos de bacharelado e licenciatura em matemática.

CONCLUSÕES

Este estudo teve por objetivo explorar e consolidar os conhecimentos fundamentais necessários para o estudo da geometria Riemanniana. Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, foram abordados temas essenciais ao estudo da geometria diferencial, tais como a álgebra multilinear e a análise real. Este projeto proporcionou uma base sólida, preparando o terreno para posteriores estudos mais avançados em geometria Riemanniana e suas aplicações em física teórica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Universidade Estadual de Maringá (UEM) pelo apoio a pesquisa e ao orientador do projeto Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka.

REFERÊNCIAS

COELHO, Flávio Ulhoa. **Um curso de álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: EdUSP, 2010.

LEE, John M. **Introduction to smooth manifolds**. 2nd ed. New York: Springer Science & Business Media, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Análise real**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2009.