GEOMETRIA DIFERENCIAL DAS CURVAS PLANAS E ESPACIAIS

Gabriel Barbosa Pereira (PIC/UEM), Patrícia Hernandes Baptistelli (Orientadora). E-mail: phbaptistelli@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

Matemática / Geometria Diferencial

Palavras-chave: Curvas parametrizadas; curvatura; triedro de Frenet.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a geometria diferencial das curvas planas e espaciais dando ênfase ao estudo das propriedades locais das curvas. Na primeira parte do projeto foi estudado conceitos das curvas planas tais como: curvatura, diedro de Frenet, forma canônica local, número de rotação, o Teorema Fundamental das Curvas Planas, curvas convexas e um tipo especial de curva chamada evoluta. Além disso, estudamos uma demonstração alternativa para o Teorema Fundamental da Álgebra usando o conceito de número de rotação. Na segunda parte do projeto foi estudado as generalizações naturais e tópicos similares do caso plano, em especial a teoria local das curvas espaciais, que possui uma diferença com o caso plano na maneira em como é definido o vetor normal e no sinal da função curvatura.

INTRODUÇÃO

A geometria diferencial é o estudo das propriedades das curvas e superfícies, e suas generalizações, por meio do cálculo diferencial e integral e da álgebra linear. A geometria diferencial clássica tem origem no século XVIII juntamente com as primeiras noções do cálculo diferencial e integral apresentadas por Newton e Leibniz.

Neste projeto, estaremos interessados no estudo das curvas planas e espaciais, principalmente do ponto de vista local, isto é, queremos analisar o comportamento na vizinhança de um ponto da curva. Intuitivamente, podemos imaginar que uma curva é a trajetória de uma partícula puntiforme no espaço. Matematicamente, uma curva é uma aplicação de um intervalo $I \subset R$ em R^2 cuja imagem é denominada traço da curva.

REVISÃO DE LITERATURA

A metodologia empregada neste projeto de iniciação científica foi a de pesquisa em materiais bibliográficos relacionados ao tema do projeto, juntamente com apresentações de seminários semanais. No estudo das curvas planas foi amplamente usado o livro da Keti Tenenblat (2008) e do Hilário Alencar e Walcy Santos (2020), que fazem o estudo local das curvas planas desde o conceito de curva parametrizada até o Teorema Fundamental das Curvas Planas. Em especial, na segunda literatura supracitada é apresentada uma propriedade global das curvas planas chamada de número de rotação, que é usada para dar uma demonstração alternativa ao Teorema Fundamental da Álgebra. Na segunda parte do projeto, utilizamos novamente o livro da Keti Tenenblat (2008) como fonte primária e o livro do Manfredo P. do Carmo (2014) como fonte secundária, para fazer o estudo das curvas espaciais.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nosso principal objetivo é estudar curvas planas e espaciais utilizando a geometria diferencial. Primeiramente, começamos com o estudo das curvas planas definindo o que é uma curva parametrizada diferenciável no plano como uma aplicação de um intervalo aberto em R^2. No estudo da Teoria Local das Curvas Planas, o objetivo é analisar o comportamento da curva na vizinhança de um ponto, considerando em cada ponto uma base ortonormal positiva do R^2, denominada diedro de Frenet. Tal diedro é formado pelo vetor tangente e pelo vetor normal da curva em um determinado ponto, o qual pode ser associado a um número real (negativo, nulo ou positivo), denominado curvatura.

Mais adiante, utilizando a expansão da série de Taylor em torno de um ponto, estudamos a Forma Canônica Local da curva a fim de mostrar que localmente toda curva pode ser aproximada por uma parábola cuja concavidade está relacionada com o sinal da função curvatura.

Um importante resultado neste estudo é o Teorema Fundamental das Curvas Planas, que caracteriza toda curva no plano pela sua função curvatura a menos de rotações e translações. Para o estudo global das curvas planas foi estudado o conceito de número de rotação e uma demonstração alternativa do Teorema Fundamental da Álgebra, que afirma que todo polinômio com coeficientes complexos possui pelo menos uma raiz complexa. Finalizamos o estudo com os conceitos de evoluta e curva convexa, que são tipos especiais de curvas planas.

Para o estudo das curvas espaciais, fizemos as generalizações naturais do caso plano. Algumas diferenças começam a aparecer na definição do vetor normal e da função curvatura, que é sempre não-negativa. Além disso, temos a existência de um triedro de Frenet, composto pelos vetores tangente, normal e binormal, formando uma base ortonormal positiva de R^3. Associada à curva em cada ponto também temos a função torção. Intuitivamente, a curvatura mede o quão distante uma curva está de sua reta tangente e a torção mede o quão distante uma curva está do seu plano osculador.

De maneira análoga ao caso plano, prosseguimos o estudo das curvas espaciais com a Forma Canônica Local e o Teorema Fundamental, o qual caracteriza as curvas espaciais, a menos de rotações e translações, por sua função curvatura e função torção.

CONCLUSÕES

Concluímos que a geometria diferencial é uma importante área de estudo para compreender propriedades locais e globais relacionadas às curvas planas e espaciais. Além de ser uma importante área na matemática pura, a geometria diferencial também é muito aplicada em outras áreas, como a física, sendo utilizada na teoria da relatividade e na computação gráfica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha professora orientadora por sempre me auxiliar e me incentivar a continuar nos estudos na matemática pura.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy; SILVA NETO, Gregório. **Geometria Diferencial das Curvas no R²**. Rio de Janeiro: SBM, 2020.

CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

TENENBLAT, Keti. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2008.