

## Estratégias para empacotamento de objetos irregulares

Joaquim Gabriel Martins (PIBIC/CNPq/FA/UEM), Francisco Nogueira Calmon Sobral  
(Orientador) E-mail: fncsobral@uem.br  
Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

**Área e subárea do conhecimento conforme tabela do [CNPq/CAPES](#).** Matemática e Estatística/Matemática Aplicada

**Palavras-chave.** Modelagem; Polígonos; Otimização;

### RESUMO

O trabalho apresenta uma discussão detalhada sobre a implementação e modelagem de problemas de empacotamento, incluindo restrições de contenção e não sobreposição. Esses problemas são comuns em nosso cotidiano e têm implicações diretas na área da logística, onde as empresas enfrentam o desafio de otimizar a disposição dos itens em contêineres. Duas restrições principais são discutidas: a restrição de contenção, que se refere aos objetos que precisam ser posicionados dentro de um espaço delimitado, e a restrição de não sobreposição, que se concentra na disposição geométrica de duas figuras distintas para evitar sobreposição ou interseção. O desenvolvimento de abordagens matemáticas e algoritmos precisos é crucial para resolver esses desafios e alcançar benefícios como a otimização do espaço disponível e a minimização de danos aos itens empacotados. As restrições de contenção são discutidas em detalhes, incluindo a contenção de circunferências e polígonos, com exemplos de modelagem matemática. Este trabalho apresenta uma abordagem matemática para resolver problemas de empacotamento, utilizando técnicas de otimização e modelagem geométrica para encontrar soluções eficientes. O código em Julia apresentado no artigo define várias funções que criam e aplicam restrições não lineares para construir um modelo matemático complexo. O objetivo é encontrar uma configuração que atenda a restrições geométricas e limitações específicas. A implementação foi testada com sucesso em problemas envolvendo a separação de polígonos e circunferências, demonstrando a eficácia dos métodos utilizados.

### INTRODUÇÃO

Problemas de corte e empacotamento são muito comuns em indústrias metalúrgicas, de couro, automotiva e logística (Peralta; Andretta; Oliveira, 2018). Quando os

objetos a serem cortados ou empacotados possuem formato irregular, torna-se necessário modelá-los e uma forma de modelagem é através de polígonos irregulares. Considere, como um exemplo simplificado, o problema de empacotamento de dois polígonos, não necessariamente convexos. Dada sua forma geométrica, é possível modelá-lo matematicamente de algumas maneiras. A primeira delas é transformá-lo na união de polígonos convexos e aplicar uma linha de separação entre eles. Outra forma seria triangularizá-los e aplicar condições de separação em ambos. Neste trabalho, utilizamos a primeira abordagem, apresentada em (Peralta; Andretta; Oliveira, 2018), com o objetivo de implementar um algoritmo que resolva automaticamente problemas de corte e empacotamento com três graus de liberdade: deslocamento vertical, horizontal e rotação. O problema foi modelado de forma geral na linguagem Julia, utilizando o pacote *JuMP*, juntamente com o algoritmo *Ipopt* (Wachter; Biegler, 2006) para otimização não linear.

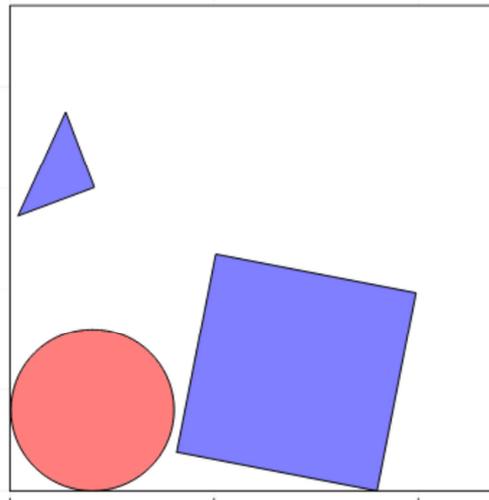
## MATERIAIS E MÉTODOS

O problema de empacotamento considerado no trabalho foi modelado como um problema de otimização com restrições. O objetivo de um problema de otimização é encontrar a melhor solução possível dentro de um conjunto de possibilidades. Geralmente, é composto por uma função objetivo a ser maximizada ou minimizada e um conjunto de restrições que devem ser satisfeitas. A região de factibilidade é o conjunto de todos os valores que satisfazem as restrições do problema.

Quando a função objetivo é não linear e as restrições são também não lineares, a otimização se torna mais complexa e requer técnicas avançadas de otimização não linear. O algoritmo *Ipopt* é um exemplo de algoritmo capaz de lidar com problemas de otimização não linear, incluindo restrições não lineares (Wachter; Biegler, 2006). Ele utiliza técnicas avançadas de pontos interiores para realizar a busca eficiente pela solução ótima (Wachter; Biegler, 2006).

A região de factibilidade é determinada pelas restrições do problema, que podem ser equações ou desigualdades que limitam as variáveis de decisão (Vanderbei, 2014). Dentro dessa região, podemos identificar os pontos estacionários, que são pontos onde as derivadas parciais da função objetivo em relação às variáveis são balanceadas com as derivadas parciais das restrições ativas, sob certas hipóteses de qualificação das restrições. Pontos estacionários são importantes em otimização, porque podem representar candidatos a soluções ótimas, além de serem computacionalmente viáveis de serem calculados.

Para implementação desses métodos, utilizamos a linguagem Julia e o pacote de modelagem matemática JuMP. Observamos que é necessário iniciar com pontos aleatórios e, possivelmente, mais de uma resolução torna-se necessária, pois existem muitos pontos estacionários que não são viáveis, conhecidos como pontos de sela. Observamos também que a restrição que impede que polígonos se sobreponham com circunferências é a mais complexa do modelo. A Figura 1 ilustra uma solução encontrada pelo modelo.



**Figura 1** – Exemplo de um problema de empacotamento de 2 polígonos convexos e uma circunferência dentro de uma região retangular.

**Fonte:** os autores.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os modelos foram implementados em JuMP, seguindo as discussões de PERALTA et al. (2018). Foram consideradas combinações de polígonos gerais e circunferências. Duas funções objetivos foram modeladas: apenas encontrar um empacotamento viável ou tentar minimizar a área do retângulo externo. A segunda encontra aplicações no problema de corte de peças de couro. Para os problemas de empacotamento, foram modeladas formas geométricas básicas, como circunferências e polígonos convexos, por meio de restrições de não sobreposição e equações analíticas. Dessa forma, polígonos bem complexos puderam ser modelados, como, por exemplo, um instrumento musical, formado pela união de polígonos básicos. As restrições de empacotamento foram definidas a partir de um envelope retangular que delimita o espaço permitido para a figura.

Os problemas foram resolvidos também em Julia, pelo algoritmo IPOPT, utilizando diversas inicializações, para evitar pontos estacionários com soluções que não podem ser realizadas na prática, obtendo soluções próximas à solução exata. Isso indica que o algoritmo é capaz de resolver problemas de minimização de funções mais complexas. Em todas as instâncias de teste, os modelos geraram problemas de pequeno porte, com aproximadamente 100 variáveis e 300 restrições, sendo resolvidos pelo algoritmo com menos de 5 segundos. Todo o código fonte está disponível publicamente em <https://github.com/joghue/empacotamentotri>.

## CONCLUSÕES

O trabalho apresenta uma abordagem matemática eficaz para resolver problemas de empacotamento, utilizando técnicas avançadas de otimização e modelagem geométrica. O código em Julia demonstra a aplicação prática dessas técnicas na resolução de problemas complexos, fornecendo soluções eficientes que atendem às restrições geométricas e limitações específicas. Isso evidencia o potencial desses métodos para melhorar a eficiência logística e gerenciar os recursos disponíveis de maneira mais inteligente.

## AGRADECIMENTOS

Agradecimentos ao CNPQ/CAPES pelo financiamento da pesquisa 1117/2022.

## REFERÊNCIAS

FRIEDLANDER, A. **Elementos de programação não-linear**. UNICAMP. Campinas. 2012.

PERALTA, J.; ANDRETTA, M.; OLIVEIRA, J. **Packing circles and irregular polygons using separation lines**. Anais: International Conference on Operations Research and Enterprise Systems (ICORES) 2018, p. 71-77.

VANDERBEI, R. J. **Linear programming: foundations and extensions**. 4ª Edição. "New York". Springer, 2014.

WACHTER, A.; BIEGLER, L. T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. **Mathematical Programming**, v. 106, n. 1, p. 25-57, 2006.