

AUTOMORFISMOS, ANTIAUTOMORFISMOS E INVOLUÇÕES DE ÁLGEBRAS DE INCIDÊNCIA FINITÁRIAS

Lucas Gabriel Scaliante Braz (PIBIC/CNPq), Érica Zancanella Fornaroli (Orientadora). E-mail: ezancanella@uem.br

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

Matemática / Álgebra

Palavras-chave: álgebra de incidência finitária; automorfismo; antiautomorfismo.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre o Problema do Isomorfismo e seus análogos para antiautomorfismos e involuções de álgebras de incidência finitárias sobre um corpo. Também apresentamos uma caracterização dos automorfismos, dos antiautomorfismos e das involuções de tais álgebras.

INTRODUÇÃO

A álgebra de incidência $I(P, R)$ de um conjunto parcialmente ordenado localmente finito P sobre um anel comutativo com unidade R foi definida em meados da década de 1960. A princípio, tal conceito foi apenas uma ferramenta para a compreensão de problemas de combinatória, mas posteriormente passou também a ser objeto de estudo dos algebristas. Para darmos um exemplo de álgebra de incidência, a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem n sobre R é (a menos de isomorfismo) a álgebra de incidência de uma cadeia com n elementos sobre R . Khripchenko e Novikov (2009) apresentaram uma generalização de tais álgebras para conjuntos parcialmente ordenados arbitrários (não necessariamente localmente finitos) sobre um corpo K , as quais foram chamadas de álgebras de incidência finitárias e foram denotadas por $FI(P, K)$.

Um dos problemas relacionados às álgebras de incidência finitárias é se um isomorfismo entre as álgebras $FI(P, K)$ e $FI(Q, K)$ implica em um isomorfismo entre os conjuntos parcialmente ordenados P e Q . Esse problema se tornou conhecido como o Problema do Isomorfismo e teve uma resposta positiva dada por

Khripchenko e Novikov (2009). Um análogo desse problema para antiautomorfismos e involuções de $FI(P, K)$ foi respondido por Brusamarello, Fornaroli e Santulo (2012). Neste projeto, estudamos as álgebras de incidência finitárias e suas propriedades com o objetivo de apresentar uma resposta ao Problema do Isomorfismo e seus análogos para antiautomorfismos e involuções, bem como apresentar uma caracterização dos automorfismos, dos antiautomorfismos e das involuções de tais álgebras. Tais caracterizações são uns dos principais interesses no estudo de qualquer álgebra A , principalmente a caracterização dos automorfismos, que são utilizados, por exemplo, na construção de outros anéis a partir de A , como os anéis de polinômios *skew* e suas generalizações.

MATERIAIS E MÉTODOS

Durante o desenvolvimento do projeto foram realizadas apresentações de seminários semanais com o objetivo de suprir possíveis dúvidas e apresentar os resultados obtidos durante o estudo semanal. As principais referências bibliográficas utilizadas foram as dissertações de Pezzott (2019) e Ruiz (2013), e o artigo de Brusamarello, Fornaroli e Santulo (2014).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Um conjunto parcialmente ordenado, ou poset, é um conjunto não vazio P munido de uma relação de ordem parcial, ou seja, uma relação $\leq$ que é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Dados x e y elementos de um poset P , definimos o intervalo de x a y como o conjunto $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$. Sejam $(P, \leq_P)$ e $(Q, \leq_Q)$ posets e seja $f: P \rightarrow Q$ uma bijeção. Dizemos que f é um isomorfismo de posets se $x \leq_P y \Leftrightarrow f(x) \leq_Q f(y)$, e dizemos que f é um anti-isomorfismo de posets se $x \leq_P y \Leftrightarrow f(y) \leq_Q f(x)$. Um isomorfismo de P em P é dito um automorfismo de P , e um anti-isomorfismo de P em P é dito um antiautomorfismo P . Um antiautomorfismo f de P tal que $f^2(x) = x$, para todo $x \in P$, é dito uma involução de P .

Seja R um anel (associativo com unidade $1_R \neq 0_R$). Um R -módulo à esquerda é um conjunto não vazio M equipado com uma operação de adição e uma multiplicação por escalares de R à esquerda, sendo que a adição é comutativa e associativa, possui elemento neutro e todo elemento de M é simetrizável. Já a multiplicação por escalar é distributiva em relação à adição de M , $(a + b)m = am + bm$ para todos $a, b \in R$ e $m \in M$, e $1_R m = m$ para todo $m \in M$. Um R -módulo à direita é definido simetricamente. Se M é um R -módulo à direita e um R -módulo à esquerda e $(rm)s = r(ms)$ para todos $r, s \in R$ e $m \in M$, então M é dito um R -bimódulo.

Seja K um corpo e seja A um anel. Dizemos que A é uma K -álgebra se A for um K -módulo à esquerda tal que $k(ab) = (ka)b = a(kb)$ para todos $k \in K$ e $a, b \in A$. Sejam A e B K -álgebras e seja $f: A \rightarrow B$ uma função bijetora. Dizemos que f é um isomorfismo de K -álgebras se $f(1_A) = 1_B$, $f(a + b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$ e $f(ka) = kf(a)$, para todos $a, b \in A$ e $k \in K$. Se $A = B$, então f é dito um automorfismo de A . Dizemos que f é um anti-isomorfismo se $f(1_A) = 1_B$, $f(a + b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(b)f(a)$ e $f(ka) = kf(a)$ para todos $a, b \in A$ e $k \in K$. Se $A = B$, então f é dito um antiautomorfismo de A . Um antiautomorfismo f de A tal que $f^2(a) = a$ para todo $a \in A$ é dito uma involução de A .

Seja K um corpo e seja P um poset. O espaço de incidência de P sobre K é o conjunto $I(P, K) = \{f: P \times P \rightarrow K: f(x, y) = 0 \text{ se } x \not\leq y\}$ com as operações de soma e produto por escalar definidas por $(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$ e $(rf)(x, y) = rf(x, y)$, para todos $f, g \in I(P, K)$, $r \in K$ e $x, y \in P$. Uma função $f \in I(P, K)$ é dita finitária se, para todos $x, y \in P$ com $x \leq y$, existe somente um número finito de subintervalos $[u, v] \subseteq [x, y]$ tal que $u < v$ e $f(u, v) \neq 0$. O conjunto de todas as funções finitárias é denotado por $FI(P, K)$, e com a multiplicação definida por $(fg)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y)$, para todos $f, g \in FI(P, K)$ e $x \leq y \in P$, $FI(P, K)$ é uma K -álgebra, chamada de álgebra de incidência finitária de P sobre K . Além disso, $I(P, K)$ é um $FI(P, K)$ -bimódulo.

Sejam P e Q posets e seja K um corpo. Se as álgebras $FI(P, K)$ e $FI(Q, K)$ são isomorfas, então os posets P e Q são isomorfos. Reciprocamente, se existe um isomorfismo de P em Q , tal isomorfismo induz um isomorfismo de K -álgebras de $FI(P, K)$ em $FI(Q, K)$. Analogamente, existe um antiautomorfismo (involução) de $FI(P, K)$ se, e somente se, existe um antiautomorfismo (involução) de P .

Uma função $\sigma \in I(P, K)$ é multiplicativa se $\sigma(x, y) \neq 0$ e $\sigma(x, y) = \sigma(x, z)\sigma(z, y)$ para todos $x \leq z \leq y$ em P . Dada uma função multiplicativa σ , a aplicação $M_\sigma: FI(P, K) \rightarrow FI(P, K)$, dada por $M_\sigma(f)(x, y) = \sigma(x, y)f(x, y)$ para todos $f \in FI(P, K)$ e $x, y \in P$, é um automorfismo de $FI(P, K)$ chamado automorfismo multiplicativo. Para cada elemento invertível u de $FI(P, K)$, a aplicação $\psi_u: FI(P, K) \rightarrow FI(P, K)$ dada por $\psi_u(f) = uf u^{-1}$ para todo $f \in FI(P, K)$, é um automorfismo de $FI(P, K)$ chamado automorfismo interno. Cada automorfismo α de P induz um automorfismo η_α de $FI(P, K)$ dado por $\eta_\alpha(f)(x, y) = f(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y))$ para todos $f \in FI(P, K)$ e $x, y \in P$. Todo automorfismo de $FI(P, K)$ pode ser escrito como a composição de um automorfismo interno, um automorfismo multiplicativo e um automorfismo de $FI(P, K)$ induzido por um automorfismo de P . De maneira análoga, todo antiautomorfismo (involução) de $FI(P, K)$ pode ser escrito(a) como a composição de um automorfismo

interno, um automorfismo multiplicativo e um antiautomorfismo (involução) ρ_λ de $FI(P, K)$ induzido por um antiautomorfismo (involução) λ de P , definido por $\rho_\lambda(f)(x, y) = f(\lambda^{-1}(y), \lambda^{-1}(x))$, para todos $f \in FI(P, K)$ e $x, y \in P$.

CONCLUSÕES

Apresentamos uma resposta para o Problema do Isomorfismo para a álgebra de incidência finitária $FI(P, K)$ de um poset P sobre um corpo K e seus análogos para antiautomorfismos e involuções. Vimos também que todo automorfismo de $FI(P, K)$ é a composição de um automorfismo interno, com um automorfismo multiplicativo e um automorfismo induzido por um automorfismo de P , enquanto que todo antiautomorfismo (involução) de $FI(P, K)$ é a composição de um automorfismo interno, um automorfismo multiplicativo e um antiautomorfismo (involução) induzido por um antiautomorfismo (involução) de P .

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao CNPq e a minha orientadora.

REFERÊNCIAS

BRUSAMARELLO, R.; FORNAROLI, E. Z.; SANTULO JR, E. A. Anti-automorphisms and involutions on (finitary) incidence algebras. **Linear Multilinear Algebra**, v. 60, n. 2, p. 181-188, 2012.

BRUSAMARELLO, R.; FORNAROLI, E. Z.; SANTULO, E. A. Classification of involutions on finitary incidence algebras. **Int J Algebra Comput**, v. 24, n. 08, p. 1085-1098, 2014.

KHRIPCHENKO, N. S.; NOVIKOV, B. V. Finitary incidence algebras. **Commun Algebra**, v. 37, n. 5, p. 1670-1676, 2009.

PEZZOTT, R. E. M. **Automorfismos de álgebras de incidência finitárias e de idealizações dos espaços de incidência**. Dissertação (Mestrado em Matemática), Programa de Pós-Graduação em Matemática - Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2019.

33º Encontro Anual de Iniciação Científica
13º Encontro Anual de Iniciação Científica Júnior



10 e 11 de Outubro de 2024

RUIZ, S. F., **Álgebras de incidência finitárias**. Dissertação (Mestrado em Matemática), Programa de Pós-Graduação em Matemática – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

