33º Encontro Anual de Iniciação Científica
13º Encontro Anual de Iniciação Científica Júnior
33ºEAIC 13ºEAIC JR
10 e 11 de Outubro de 2024

EQUILÍBRIO DE NASH EM ESTRATÉGIAS PURAS

Gustavo Furtado de Lima (PIC-UEM), Edilson Soares Miranda (Orientador),
e-mail: esmiranda@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Ciências, Goioerê, PR.

Área: Matemática. Subárea: Matemática Aplicada

Palavras-chave: Teoria dos jogos, Dilema dos prisioneiros, Matemática aplicada.

RESUMO:

Com base no estudo na Teoria dos Jogos, aplicamos conceitos de jogos em algumas áreas através de argumentos matemáticos, mostrando aspectos como estrutura, formas e meios de resolver um jogo. Apresentamos estes conceitos com enfoque em situações de cooperação e conflito. O componente básico em um jogo é o grupo de jogadores que o compõem, sendo que cada um possui um conjunto de estratégias à sua disposição. Quando cada jogador faz sua escolha estratégica, resulta em uma situação ou perfil dentro do conjunto de todas as situações (ou perfis) possíveis. Finalmente estudamos estratégias dominantes e o equilíbrio de Nash. O estudo teve como objetivo entender as escolhas estratégicas dos jogadores e quantificar as vantagens envolvidas em jogos não cooperativos, tais como o Dilema do Prisioneiro e o Matching Pennies.

INTRODUÇÃO

A teoria dos jogos busca representar situações em que há conflito, ou seja, quando dois ou mais agentes interagem com interesses opostos. Dessa forma, ela pode ser descrita como a teoria dos modelos matemáticos que analisa a tomada de decisões ideais em cenários de conflito. Os jogos de estratégias, segundo Fiani (2004) são “situações que envolvem interações entre agentes racionais que se comportam estrategicamente e podem ser analisadas formalmente como um jogo”.

A teoria dos jogos iniciou no século XVIII, por trocas de correspondencias entre Nicolas Bernoulli e James Waldegrave. No seculo XIX, Zermello e Borel, independentemente, publicaram diversos trabalhos sobre jogos. Borel acreditava que a guerra e a economia poderiam ser analisadas por meio de jogos estratégicos. Em 1928 John von Neumann apresentou resultados significativos, mas o grande avanço ocorreu em 1950 com John Forbes Nash Junior, que, junto com outros, foi agraciado com o Prêmio Nobel em 1994 por suas contribuições à teoria dos jogos.

O Equilíbrio de Nash descreve uma situação em que, em um jogo com dois ou mais jogadores, nenhum deles pode obter vantagem alterando sua estratégia de forma unilateral.

MATERIAIS E MÉTODOS

A base teórica deste trabalho foi construída a partir de estudos dirigidos dos materiais bibliográficos Fiani (2004), Bierman e Fernandez (2011). Utilizamos o artigo Andrade e Zanco (2018) para estudar a teoria dos jogos de maneira formal, complementada por discussões e apresentações de seminários semanais.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Um jogo é uma terna (G,S,U), onde $G=\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}$ é o conjunto de jogadores g_i, $S=\{S_1,S_2,\ldots,S_n\}$ é o conjunto das estratégias de cada jogador, $S_i=\{S_{i1},S_{i2},\ldots,S_{im_i}\}$ são as opções de decisões do jogador g_i denominadas de estratégias puras e $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ é o conjunto das funções utilidades de cada g_i.

Temos que u_i é definida por $u_i:\prod_{i=1}^{n} S_i \mapsto \Re$ onde $\prod_{i=1}^{n} S_i$ é o espaço das estratégias puras. Um elemento $s\in\prod_{i=1}^{n} S_i$ é chamado um perfil de estratégias puras, assim $s=\{s_{1j_1},s_{2j_2},\ldots,s_{nj_n}\}$. Observe que $u_i(s)$ associa a cada perfil de estratégias puras um ganho (payoff) do jogador g_i quando os jogadores utilizaram as suas estratégias puras apresentadas em s. As soluções de um jogo é o conjunto de possíveis resultados baseados nas escolhas estratégicas de cada jogador. Denotamos por $s_{-i}=\{s_{1j_1},s_{2j_2},\ldots,s_{(i-1)j_{i-1}},s_{(i+1)j_{i+1}},\ldots,s_{nj_n}\}$ um perfil de estratégia em que a estratégia do jogador g_i é retirada. Deste modo, um perfil de estratégia pura pode ser representada por $s=(s_{ij},s_{-i})=\left(s_{1j_1},s_{2j_2},\ldots,s_{(i-1)j_{i-1}},s_{ij_i},s_{(i+1)j_{i+1}},\ldots,s_{nj_n}\right)$.

O Equilíbrio de Nash em um jogo acontece quando, entre todas as estratégias disponíveis para os jogadores, cada um escolhe a melhor estratégia possível levando em consideração as escolhas dos demais. Dessa forma, nenhum jogador tem motivação para alterar sua estratégia, a menos que os outros também mudem. Matematicamente, um perfil de estratégia pura

$$s^* = \left(s^*{}_1, s^*{}_2, \ldots, s^*{}_{(i-1)}, s^*{}_i, s^*{}_{(i+1)}, \ldots, s^*{}_n\right) \in S$$

é um equilíbrio de Nash se $u_i(s^*_{ij}, s^*_{-i}) \geq u_i(s_{ij}, s_{-i})$ quando $i = 1,2,..., n$ e para todo $j_i = 1,2,...,m_i$ com $m_i \geq 2$.

Exemplo 1: (O Dilema do Prisioneiro) Este é um dos exemplos mais famosos, foi introduzido por Albert W. Tucker em 1950. Bierman e Fernandez (2011) apresentaram esse problema em sua versão original: Dois ladrões, Al e Bob, são presos e acusados do mesmo delito. Detidos em celas separadas e sem possibilidade de se comunicarem, o delegado lhes faz a seguinte proposta: cada um pode optar entre confessar ou negar o crime. Se nenhum dos dois confessar, ambos receberão uma pena de um ano de prisão. Se ambos confessarem, cada um cumprirá cinco anos. Porém, se um confessar e o outro negar, aquele que confessou será libertado, enquanto o outro será condenado a dez anos de prisão.

Formalmente temos,

G = $\{g_1, g_2\}$, S_1 = {confessar, negar} = $\{s_{11}, s_{12}\}$, S_2 = {confessar, negar} = $\{s_{21}, s_{22}\}$,
S = {(confessar, confessar), (confessar, negar), (negar, confessar), (negar,negar)}.

As funções utilidades $u_1: S_1 \times S_2 \mapsto \Re$ e $u_2: S_1 \times S_2 \mapsto \Re$ que representam os ganhos de Al e de Bob respectivamente, são dadas por u_1(confessar,confessar)=-5, u_1(confessar,negar)=0 u_1(negar,confessar)=-10, u_1(negar,negar)=-1, u_2(confessar,confessar)=-5, u_2(confessar,negar)=-10, u_2(negar,confessar) =-0, u_2(negar,negar)=-1.

Vamos analisar esse jogo a partir da perspectiva do jogador 1 (Al). Existem duas possibilidades em relação ao jogador 2 (Bob): ele pode confessar ou não confessar. Se Bob confessar, a melhor escolha para Al também é confessar. Se Bob não confessar, Al ficará livre se optar por confessar. Portanto, em qualquer cenário, confessar é a melhor opção para Al.

Da mesma forma, analisemos o jogo do ponto de vista de Bob. As mesmas duas situações se aplicam a Al: ele pode confessar ou não. Se Al confessar, é vantajoso para Bob confessar também. Se Al não confessar, Bob será libertado se decidir confessar. Logo, em qualquer situação, a melhor escolha para Bob é confessar. Pensando dessa maneira, ambos acabarão presos por cinco anos.

No dilema dos prisioneiros, o perfil de estratégias (confessar, confessar) é um equilíbrio de Nash. Esse dilema reflete a essência da teoria dos jogos, que não apenas modela decisões racionais, mas também revela as complexidades e contradições inerentes às escolhas estratégicas em situações de conflito.

Exemplo 2: (Matching Pennies) Neste jogo, os dois participantes revelam, simultaneamente, a moeda que cada um esconde na mão. Se ambos mostram o mesmo lado da moeda, seja cara ou coroa, o segundo jogador entrega sua moeda ao primeiro. No entanto, se as moedas forem diferentes, ou seja, se um mostrar cara e o outro coroa, o primeiro jogador entrega sua moeda ao segundo. Assim,

G = $\{g_1, g_2\}$, S_1 = {cara, coroa} = $\{s_{11}, s_{12}\}$, S_2 = {cara, coroa} = $\{s_{21}, s_{22}\}$,
S = {(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa,coroa)}.

As funções utilidades $u_1 : S_1 \times S_2 \mapsto \Re$e $u_2 : S_1 \times S_2 \mapsto \Re$ que representam os ganhos (payoffs) dos jogadores g_1 e g_2 respectivamente, são dadas por u_1(cara,cara)=1, u_1(cara,coroa)=-1, u_1(coroa,cara)=-1, u_1(coroa,coroa)=1, u_2(cara,cara)=-1, u_2(cara,coroa)=1, u_2(coroa,cara)=1, u_2(coroa,coroa)=-1.

De acordo com os payoffs do jogo M*atching Pennies*, temos que u_1(cara,cara)=1≥ u_1(coroa,cara)=-1. Para que (cara,cara) seja um equilíbrio de Nash, é necessário que u_2(cara,cara)≥ u_2(coroa,cara), mas isso não ocorre. Aplicando o mesmo raciocínio para o caso (coroa, coroa), conclui-se que também não se trata de um equilíbrio de Nash. Assim, esse jogo não possui equilíbrio de Nash com estratégias puras, o que nos leva a buscar outra abordagem para encontrar a melhor solução. Uma das opções é realizar uma análise probabilística, utilizando o conceito de estratégias mistas.

CONCLUSÕES

A teoria dos jogos é utilizada para se analisar temas tais como eleições, leilões, evolução genética, etc. Atualmente, seus aspectos matemáticos são estudados de maneira mais aprofundada, e suas aplicações servem como ferramentas ou alegorias para ajudar a compreender sistemas mais complexos. Entender as estratégias dos jogadores e quantificar as vantagens envolvidas em um jogo é o objetivo da Teoria dos Jogos. Aliado a isso, essa teoria visa entender a racionalidade das decisões tomadas, partindo do princípio de que os jogadores agem de forma racional ao procurar a melhor estratégia, aquela que lhes proporciona maior benefício, seja em termos de lucro ou satisfação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Departamento de Ciências, o meu orientador Professor Edilson Soares Miranda por me introduzir à pesquisa matemática e a minha família pelo apoio.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, D.; ZANCO T. Introdução à teoria dos Jogos. **Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática**, v.22 p. 25–51, 2018. Disponível em: http://www.dma.uem.br/kit/jeepema-1/art8.pdf. Acesso em 05/07/2024.

BIERMAN, S.H. e FERNANDEZ, L. F., **Teoria dos jogos**. São Paulo: Pearson Prentice Hall. 2011.

FIANI, R. **Teoria dos jogos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2004.