

QUANTO CUSTA A ÁGUA?

Giovana Melo dos Santos (PIC/UEM). Francisco Nogueira Calmon Sobral (Orientador). E-mail: fncsobral@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

Área e subárea do conhecimento: Matemática/Matemática Aplicada

Palavras-chave: método de pontos interiores, programação inteira, roteamento de veículos, geração de colunas

RESUMO

Em problemas de programação matemática, frequentemente há uma grande quantidade de variáveis e restrições. Para lidar eficientemente com essa complexidade, o método de geração de colunas, aliado ao *Branch-and-Price*, é uma solução eficaz. Essa abordagem otimiza problemas de grande escala, como o roteamento de veículos, concentrando-se nas variáveis mais promissoras e melhorando o uso de tempo e recursos computacionais.

INTRODUÇÃO

O problema de distribuição de água em centros urbanos é complexo e essencial, envolvendo a ativação de bombas e abastecimento de reservatórios para atender à demanda diária (Toledo et. al, 2008). A estrutura do problema pode ser modelada por programação linear e resolvida com métodos de pontos interiores. No entanto, a ativação das bombas exige variáveis inteiras, o que pode ser abordado com técnicas de geração de colunas combinadas com uma estratégia clássica denominada *Branch-and-Price*, reconhecidamente eficazes em problemas como o roteamento de veículos (VRP).

O problema de distribuição pode ser modelado como um problema de programação inteira, conforme descrito a seguir.

$$\text{Minimizar } \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^R (c_{jt} x_{jt} + sc_{jt} \alpha_{jt}) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^R \sum_{\ell \in R_j} \gamma_{j\ell t} z_{j\ell t}$$

Sujeito a

$$I_{jt} = I_{j,t-1} + v_{jt} x_{jt} + \sum_{\ell \in P_j} w_{\ell jt} z_{\ell jt} - \sum_{\ell \in R_j} w_{j\ell t} z_{j\ell t} - \sum_{k \in S_j} d_{kt} \quad j = 1 \dots R, t = 1 \dots T;$$

$$x_{jt} \leq y_{jt} \quad j = 1 \dots R, t = 1 \dots T;$$

$$\alpha_{jt} \geq y_{jt} - x_{j,t-1} \quad j = 1 \dots R, t = 1 \dots T;$$

$$h_j^{\min} \leq I_{jt} \leq h_j^{\max} \quad j = 1 \dots R, t = 1 \dots T;$$

$$0 \leq z_{\ell jt} \leq 1 \quad \ell, j = 1 \dots R, t = 1 \dots T;$$

$$0 \leq x_{jt} \leq 1 \quad j = 1 \dots R, t = 1 \dots T;$$

$$x_{j0} = 0, I_{j0} = h_j^0 \quad j = 1 \dots R;$$

$$y_{jt} \in \{0,1\}, \alpha_{jt} \in \{0,1\} \quad j = 1 \dots R, t = 1 \dots T.$$

Neste caso, leva-se em consideração um horizonte de planejamento e faz-se uso crucial das variáveis de decisão α_{jt} , as quais indicam se houve acionamento da bomba j no período t ou não.

Outro problema de grande porte estruturalmente similar é o Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo (VRPTW), o qual consiste em planejar rotas para uma frota de veículos, de modo que cada cliente seja atendido dentro de um intervalo de tempo específico e o trajeto total seja o menor possível. Cada veículo deve começar e terminar no depósito, visitar um único cliente por vez, e transportar uma carga que não ultrapasse sua capacidade. Se o veículo chegar antes do horário, ele pode esperar, mas atrasos não são permitidos.

O objetivo deste trabalho foi explorar o método de geração de colunas em conjunto com o Branch-and-Price, viabilizando a obtenção do conjunto de rotas ótimas e solucionando de forma eficiente o VRPTW quando o montante de variáveis de decisão torna-se um problema evidente.

REVISÃO DE LITERATURA

Na modelagem apresentada para o problema de distribuição de água, observa-se o grande potencial de crescimento na dimensão do problema, especialmente quando se considera um horizonte de planejamento extenso ou um grande número de

bombas que podem ser acionadas, o que torna interessante a procura por métodos heurísticos que nivelem essa dificuldade (Santos et. al, 2022).

Nesse contexto, os Problemas de Roteamento de Veículos (VRPs) são clássicos e servem como referência para o estudo de métodos voltados a superar as dificuldades inerentes à discretização de variáveis em problemas de otimização, que podem ser superadas pela combinação de geração de colunas e o método de pontos interiores (Munari; Gondzio, 2015). Somos motivados a este estudo pela fraca relaxação linear do modelo para o VRPTW. Portanto, o método proposto se baseará em um modelo diferente que apresenta uma melhor relaxação linear.

Utilizamos um modelo com base em Ω , o conjunto de rotas viáveis de veículos, ou seja, o conjunto dos caminhos, no grafo das rotas, que partem do depósito, retornam ao depósito, satisfazem as restrições de capacidade e janelas de tempo, e visitam no máximo uma vez cada cliente.

O modelo em questão é claramente difícil de lidar com uma abordagem de *Branch-and-Bound*, uma vez que o tamanho de Ω cresce exponencialmente com o número de tarefas n . Portanto, a avaliação dos programas lineares no método exigiria lidar com muitas variáveis. Nesse cenário, podemos buscar a solução com uma técnica de geração de colunas e, nesse caso, surge o *Branch-and-Price*.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Chamamos de MP (Problema Mestre) $MP(\Omega)$ a relaxação linear do modelo em questão e introduzimos a restrição do MP a um subconjunto $\Omega_1 \subset \Omega$ como $MP(\Omega_1)$

A cada iteração, o MP é resolvido com as colunas atuais e avalia-se se novas colunas (rotas) podem melhorar a solução, buscando-as através de um subproblema de otimização. Se o subproblema encontrar uma rota com custo reduzido negativo, ela é adicionada ao MP, que é resolvido novamente. O processo continua até que nenhuma nova coluna melhore a solução.

Quando o problema é inteiro, a geração de colunas é combinada com o *Branch-and-Bound*, formando o *Branch-and-Price*. Nesta abordagem, a árvore do *Branch-and-Bound* explora diferentes soluções, enquanto a geração de colunas resolve os problemas lineares relaxados em cada nó.

CONCLUSÕES

A técnica de geração de colunas se destaca como uma abordagem poderosa para enfrentar a complexidade inerente aos problemas de roteamento de veículos, especialmente aqueles que envolvem um grande número de variáveis e restrições, como o VRPTW. Ao iterativamente focar em subconjuntos de soluções e expandir o espaço de busca com base em rotas que melhoram a solução, esse método permite obter soluções eficientes e de qualidade para problemas que seriam intratáveis utilizando abordagens tradicionais. Dessa forma, a geração de colunas, combinada com técnicas de *Branch-and-Bound*, como o *Branch-and-Price*, constitui uma ferramenta essencial na otimização de problemas complexos de roteamento.

REFERÊNCIAS

TOLEDO, Franklina et al. Logística de distribuição de água em redes urbanas: racionalização energética. **Pesquisa Operacional**, v. 28, p. 75-91, 2008.

SANTOS, Maristela O. et al. A mixed integer programming model and solution method for the operation of an integrated water supply system. **International Transactions in Operational Research**, v. 29, n. 2, p. 929-958, 2022.

MUNARI, Pedro; GONDZIO, Jacek. Column generation and branch-and-price with interior point methods. **Proceeding series of the Brazilian society of computational and applied mathematics**, v. 3, n. 1, 2015.